Lineare und Ganzzahlige Optimierung

WS 2008/2009

Übungszettel 3

Aufgabe 1:
Seien P ein Polyeder mit $\dim(P) = d$ und F eine Seitenfläche von P der Dimension k mit $0 \leq k < d$. Dann gibt es Seitenflächen $F_{k+1}, F_{k+2}, \ldots, F_{d-1}$ von P mit

i) $F \subseteq F_{k+1} \subseteq F_{k+2} \subseteq \ldots \subseteq F_{d-1} \subseteq P$,

ii) $\dim(F_{k+i}) = k + 1$, für $i = 1, \ldots, d - k - 1$.

(Beweis durch Induktion über $d - k$).

(4 Punkte)

Aufgabe 2:
Ist P ein Polyeder und F eine Facette von P, dann gilt $\dim F = \dim P - 1$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei F eine minimale Seitenfläche eines Polyeders $P = \{x | \, Ax \leq b\}$. Zeige, dass dann $Ax = Ay$ für alle $x, y \in F$ gilt.

(4 Punkte)

Aufgabe 4:
Sie sollen als Trainer einer Basketball-Mannschaft eine Startaufstellung festlegen. Dazu müssen Sie aus sieben Spielern fünf auswählen. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick, auf welchen Positionen welche Spieler eingesetzt werden können und welche Stärken und Schwächen sie haben:

		Fähigkeiten			
Spieler	Position	Ballbehandlung	Wurftechnik	Rebounds	Defensive
1	V	3	3	1	3
2	C	2	1	3	2
3	V,A	2	3	2	2
4	A,C	1	3	3	1
5	V,A	1	3	1	2
6	A,C	3	1	2	3
7	V,A	3	2	2	1

Wir nehmen an, dass es drei mögliche Positionen gibt, nämlich Verteidigung (V), Angriff (A) und Center (C). In der zweiten Spalte der Tabelle ist angegeben, auf welchen Positionen der betreffende Spieler spielen kann. Die weiteren Spalten bewerten die Fähigkeiten des Spielers mit Zahlen von 1 (=schwach) bis 3 (=hervorragend).
Die folgenden Nebenbedingungen sind einzuhalten:

- Es müssen mindestens vier Spieler, die in der Verteidigung spielen können, mindestens zwei, die im Angriff spielen können, und mindestens ein Spieler, der auf der Center-Position spielen kann, aufgestellt werden.
- In jeder der Kategorien Ballbehandlung, Wurftechnik und Rebounds muss die Mannschaft mindestens einen Durchschnittswert von 2 erreichen.
- Wenn Spieler 3 aufgestellt wird, dann darf nicht Spieler 6 aufgestellt werden.
- Wenn Spieler 1 aufgestellt wird, müssen auch Spieler 4 und Spieler 5 in der Mannschaft sein.
- Sie müssen entweder Spieler 2 oder Spieler 3 aufstellen.

Das Ziel ist nun, alle diese Nebenbedingungen einzuhalten und dabei die defensiven Fähigkeiten der Mannschaft zu maximieren. Formulieren Sie dieses Problem als Ganzzahliges Lineares Programm, und lösen Sie es.

(4 Punkte)

Aufgabe 5:
Sei $Ax \leq b$ ein lineares Ungleichungssystem in n Variablen. Indem wir Zeilen mit einer positiven Konstanten multiplizieren, können wir erreichen, dass die erste Spalte von A nur aus den Einträgen 0, -1 und 1 besteht. Dann lässt sich sich $Ax \leq b$ in der folgenden Form schreiben:

$$\begin{array}{rcll} a_i'x' & \leq & b_i & (i = 1, \ldots, m_1) \\ -x_1 + a_j'x' & \leq & b_j & (j = m_1 + 1, \ldots, m_2) \\ x_1 + a_k'x' & \leq & b_k & (k = m_2 + 1, \ldots, m) \end{array}$$

Dabei ist $x' = (x_2, \ldots, x_n)$, und $a_1', \ldots, a_m'$ sind die Zeilen von A ohne den ersten Eintrag. Nun wollen wir x_1 eliminieren. Zeigen Sie, dass $Ax \leq b$ genau dann eine Lösung hat, wenn das System

$$\begin{array}{rcll} a_i'x' & \leq & b_i & (i = 1, \ldots, m_1) \\ a_j'x' - b_j & \leq & b_k - a_k'x' & (j = m_1 + 1, \ldots, m_2, k = m_2 + 1, \ldots, m) \end{array}$$

eine Lösung hat. Zeigen Sie, dass man, wenn man diesen Schritt iteriert, einen Algorithmus zur Lösung linearer Ungleichungssysteme erhält.
Bemerkung: Dieses Verfahren heisst Fourier-Motzkin-Elimination.

(4 Punkte)

Aufgabe 6:
Benutzen Sie die Fourier-Motzkin-Elimination (siehe Aufgabe 5), um die folgende Aussage zu zeigen:
Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Dann gibt es genau dann einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax \leq b$, wenn $yb \geq 0$ für jeden Vektor $y \geq 0$ mit $yA = 0$ gilt.

(4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 13.11.08, **vor** der Vorlesung