

## Einführung in die Diskrete Mathematik

## 12. Übung

1. Das Entscheidungsproblem **CLIQUE** ist *NP*-vollständig. Ist es weiterhin *NP*-vollständig, wenn es auf Instanzen beschränkt wird, in denen der Graph
  - (a) bipartit ist?
  - (b) 2-fach zusammenhängend ist?

(4 Punkte)
2. Betrachten Sie folgendes Problem: Finde zu einem gegebenen Graph  $G$  eine möglichst kleine Menge  $X \subseteq V(G)$  mit  $X \cup \Gamma(X) = V(G)$ . Hier ist  $\Gamma(X)$  wieder die Menge der Nachbarn von  $X$ . Man zeige, dass es für dieses Problem genau dann einen polynomiellen Algorithmus gibt, wenn  $P = NP$  ist. 

(4 Punkte)
3. Man bestimme entweder einen polynomiellen Algorithmus für die folgenden Entscheidungsprobleme, oder man beweise ihre *NP*-Vollständigkeit:
  - (a) Gibt es für einen gegebenen ungerichteten Graphen  $G$  und eine gegebene Knotenmenge  $T \subseteq V(G)$  einen aufspannenden Baum in  $G$ , so dass alle Knoten in  $T$  Blätter sind?
  - (b) Gibt es für einen gegebenen ungerichteten Graphen  $G$  und eine gegebene Knotenmenge  $T \subseteq V(G)$  einen aufspannenden Baum in  $G$ , so dass alle Blätter Elemente von  $T$  sind?

(4 Punkte)
4. Zeigen Sie, dass folgendes Entscheidungsproblem *NP*-schwer ist: Es seien  $n, m \in \mathbb{N}$ , eine Matrix  $A \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$  und ein Vektor  $b \in \mathbb{Z}^m$  gegeben. Existiert dann ein  $x \in \mathbb{Z}^n$  mit  $Ax \leq b$ ? (Die letzte Ungleichung ist so zu verstehen, dass jeder Eintrag von  $b - Ax$  nichtnegativ ist.) 

(4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 27.1.2009, **vor** der Vorlesung.