

Einführung in die Diskrete Mathematik

9. Übung

1. Sei G ein gerichteter Graph mit Kantengewichten $c : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_+$, und seien $s, t \in V(G)$. Es gebe in G nur einen kürzesten s - t -Weg P . Wie kann man dann in polynomieller Zeit einen kürzesten von P verschiedenen s - t -Weg finden? (4 Punkte)
2. Sei G ein Graph mit Kantenlängen $c : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_+$ und $s, t \in V$. Wir wollen einen kürzesten s - t -Pfad finden, indem wir Dijkstras Algorithmus von beiden Knoten s und t aus starten. Wir stoppen, sobald ein Knoten $v \in V$ aus *beiden* Priority Queues entfernt wurde.
 - a) Gib ein Beispiel, in dem dann $v.\text{Abstand}_s + v.\text{Abstand}_t > \text{dist}(s, t)$ gilt.
 - b) Wie findet man mit dieser Abbruchbedingung dennoch einen kürzesten s - t -Weg? (4 Punkte)
3. Gegeben sei ein gerichteter Graph mit konservativen Kantengewichten. Wie kann man in Zeit $O(n^3)$ einen Kreis mit minimalem Gesamtgewicht finden (4 Punkte)
Hinweis: Man modifiziere den FLOYD-WARSHALL-ALGORITHMUS etwas.
4. Die Zeitsteuerungsbedingungen („timing constraints“) eines Logikchips lassen sich durch einen gerichteten Graphen G mit Kantengewichten $c : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_+$ darstellen. Dabei entsprechen die Knoten den Speicherelementen und die Kanten gewissen durch die kombinatorische Logik definierten Wegen, während die Gewichte (Schätzungen der) Signallaufzeiten entsprechen. Eine wichtige Aufgabe der VLSI-Chip-Designs (VLSI bedeutet „very large scale integrated“) ist es, einen optimalen Clock-Zeitplan zu finden, d.h. eine Zahl möglichst kleine Zahl T und eine Abbildung $a : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, daß $a(v) + c((v, w)) \leq a(w) + T$ für alle $(v, w) \in E(G)$. T ist die Zykluszeit des Chips, und $a(v)$ bzw. $a(v) + T$ sind die Startzeit bzw. die späteste zulässige Ankunftszeit des Signals in v .
 - a) Reduziere das Problem, das optimale T zu finden, auf das MINIMUM-MEAN-CYCLE-PROBLEM.
 - b) Zeige, wie man die Zahlen $a(v)$ einer optimalen Lösung effizient bestimmen kann.
 - c) Typischerweise sind einige der Zahlen $a(v)$ vorab festgelegt. Man zeige, wie man in diesem Fall das Problem lösen würde. (4 Punkte)