Ganzzahlige Lineare Optimierung

Ganzzahlige Lineare Optimierung

Wir wissen: Ganzzahlige Lineare Optimierung ist NP-schwer.

$\Rightarrow$ Können nicht auf einen polynomiellen Algorithmus hoffen.

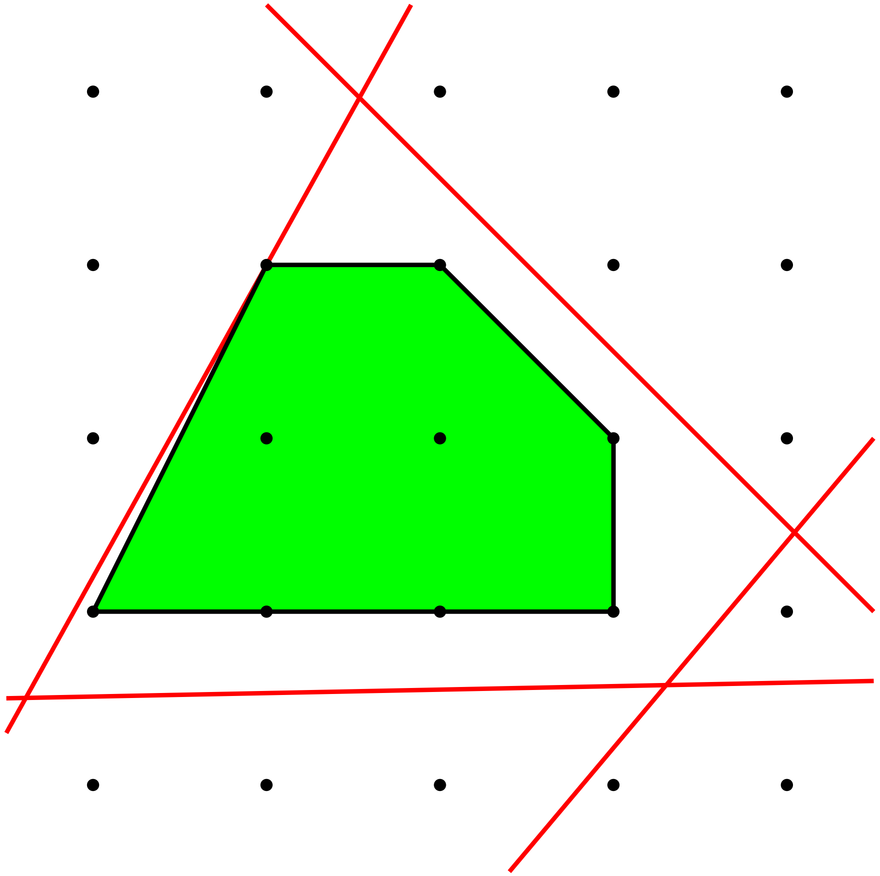
Aber: Man kann leicht komplexere Nebenbedingungen modellieren:

- "($x \geq a$ oder $y \geq b$) und $x, y \geq 0$" für Zahlen $a, b > 0$.
- "$x \in \{s_1, \ldots, s_k\}$" für eine Menge $\{s_1, \ldots, s_k\}$ von Zahlen.

Ganzzahlige Hülle

Definition:

Für ein Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ heißt
$P_I := \text{conv}\{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \leq b\}$ **ganzzahlige Hülle** (**integer hull**) von P.



Ganzzahlige Hülle

Beobachtungen:

- Für einen rationalen polyedrischen Kegel (also einen Kegel $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$ mit $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$) gilt $C_I = C$ (Übung).
- P_I ist nicht unbedingt ein Polyeder (Übung).
- Falls P ein Polytop ist, dann ist P_I ein Polyeder.

Nächstes Ziel: Finde ein Zertifikat, das zeigt, dass ein Gleichungssystem *keine* ganzzahlige Lösung hat.

Definition

Eine $m \times n$-Matrix A ist in **Hermitescher Normalform**, wenn sie in der Form $A = [B\,0]$ geschrieben werden kann, wobei B eine reguläre nicht-negative untere Dreiecksmatrix ist, sodass in jeder Zeile von B der Diagonaleintrag der größte Eintrag ist.

Die folgenden Modifikationen von Matrizen heißen **elementare unimodulare Spaltenoperationen**:

- Vertausche zwei Spalten.
- Multipliziere eine Spalte mit -1.
- Addiere ein ganzzahligen Vielfaches einer Spalte zu einer anderen Spalte.

Theorem

Jede Matrix $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ mit Rang m kann durch eine Folge von elementaren unimodularen Spaltenoperationen in eine Matrix in Hermitescher Normalform gebracht werden.

TDI-Systeme

Theorem

Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ mit $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) P ist ganzzahlig.

(b) Jede Fläche von P enthält mindestens einen ganzzahligen Vektor.

(c) Jede minimale Fläche von P enthält mindestens einen ganzzahligen Vektor.

(d) Jede Stützhyperebene von P enthält mindestens einen ganzzahligen Vektor.

(e) Jede rationale Stützhyperebene von P enthält mindestens einen ganzzahligen Vektor.

(f) $\max\{c^t x \mid x \in P\}$ wird für jeden ganzzahligen Vektor c, für den das Maximum endlich ist, von einem ganzzahligen Vektor angenommen.

(g) $\max\{c^t x \mid x \in P\}$ ist für jeden ganzzahligen Vektor c, für den das Maximum endlich ist, ganzzahlig.