Separation $\to$ Optimierung

Theorem

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{Q}^n$. Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein rationales Polytop und sei $x_0 \in P$ ein Vektor im Inneren von P. Sei $T \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sodass $\text{size}(x_0) \leq \log(T)$ und $\text{size}(x) \leq \log(T)$ für alle Ecken x von P gilt.

Zu gegebenen n, c, x_0, T und einem polynomiellen Separationsorakel für P kann eine Ecke x^* von P, in der das Maximum $\max\{c^t x \mid x \in P\}$ angenommen wird, in einer Laufzeit gefunden werden, die polynomiell in n, $\log(T)$ und $\text{size}(c)$ ist.

Hier ohne Beweis

Optimierung $\to$ Separation

Theorem

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{Q}^n$. Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein rationales Polytop und sei $x_0 \in P$ ein Vektor im Inneren von P. Sei $T \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sodass $\mathrm{size}(x_0) \leq \log(T)$ und $\mathrm{size}(x) \leq \log(T)$ für alle Ecken x von P gilt.

Zu gegebenem n, y, T und einem Orakel, das zu einem gegebenem $c \in \mathbb{Q}^n$ eine Ecke x^* of P ausgibt, in der das Maximum $\max\{c^t x \mid x \in P\}$ angenommen wird, können wir ein Separationsorakel für P und y mit einer Laufzeit, die polynomiell in n, $\log(T)$ und $\mathrm{size}(y)$ ist, implementieren. Falls $y \notin P$, können wir in dieser Laufzeit eine facettenbestimmende Ungleichung für P finden, die von y verletzt wird.

Hier ebenfalls ohne Beweis

Innere-Punkt-Methoden

Primales und duales LP:

(P):
$$
\begin{array}{rrcl}
 & \max c^t x & & \\
\text{s.t.} & Ax + s & = & b \\
 & s & \geq & 0
\end{array}
\tag{1}
$$

(D):
$$
\begin{array}{rrcl}
 & \min b^t y & & \\
\text{s.t.} & A^t y & = & c \\
 & y & \geq & 0
\end{array}
\tag{2}
$$

Wir berechnen eine Lösung des dualen LPs.

Können annehmen:

- Spalten von A sind linear unabhängig.
- Es gibt mehr Zeilen als Spalten.

Kombinierte Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} Ax + s &= b \\ A^t y &= c \\ y^t s &= 0 \\ y &\geq 0 \\ s &\geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Neue Bedingungen:

$$\begin{aligned} Ax + s &= b \\ A^t y &= c \\ \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{y_i s_i}{\mu} - 1 \right)^2 &\leq \frac{1}{4} \\ y &> 0 \\ s &> 0 \end{aligned} \qquad (*)$$

Allgemeine Strategie:

(I) Berechne eine Startlösung von (einer modifizierten Version von) (**??**).

(II) Verringere μ um einen konstanten Faktor und passe x, y und s an den neuen Wert von μ an, sodass wieder eine Lösung von of (**??**) entsteht.
Iteriere den Schritt, bis μ klein genug ist.

(III) Berechne eine Optimallösung des duale LPs.

Schritt (I): Startlösung:

Wir müssen (D) zulässig und beschränkt machen.

Mache (D) beschränkt: Wähle “hinreichend großes” W (nämlich $W = 2^{4m(\mathrm{size}(A)+\mathrm{size}(b))} + 1$) und Zusatzvariable y_{m+1}.

Betrachte (D’):

$$\begin{array}{rrcrcl}
\min & b^t y & & & & \\
\text{s.t.} & A^t y & & & = & \frac{1}{W} c \\
 & \mathbb{1}^t y & + & y_{m+1} & = & m+1 \\
 & y & & & \geq & 0 \\
 & & & y_{m+1} & \geq & 0
\end{array} \qquad \text{(D’)}$$

Schritt (I): Startlösung:

Wir müssen (D) zulässig und beschränkt machen.

Mache (D') zulässig: Wähle "hinreichend großes" H (nämlich $H = (\|b\|_1(m+2)+1)2^{4m(\text{size}(A)+\text{size}(c)+\text{size}(W))}$) und Zusatzvariable y_{m+2}.

Betrachte (D"):

$$
\begin{array}{llcccll}
\min & b^t y & & & + & H y_{m+2} & & \\
\text{s.t.} & A^t y & & & + & \left(\frac{1}{W}c - A^t \mathbb{1}\right) y_{m+2} & = & \frac{1}{W}c \\
 & \mathbb{1}^t y & + & y_{m+1} & + & y_{m+2} & = & m+2 \\
 & y & & & & & \geq & 0 \\
 & & & y_{m+1} & & & \geq & 0 \\
 & & & & & y_{m+2} & \geq & 0
\end{array}
\qquad \text{(D")}
$$

Schritt (I): Startlösung:

Duales von (D”):

$$
\begin{array}{rclclclclcl}
\max \frac{1}{W} c^t x & + & (m+2) x_{n+1} & & & & & & & & \\
Ax & + & x_{n+1} \mathbb{1} & + & s & & & & & = & b \\
\left(\frac{1}{W} c^t - \mathbb{1}^t A\right) x & + & x_{n+1} & & & & & + & s_{m+2} & = & H \\
 & & x_{n+1} & & & + & s_{m+1} & & & = & 0 \\
 & & & & s & & & & & \geq & 0 \\
 & & & & & & s_{m+1} & & & \geq & 0 \\
 & & & & & & & & s_{m+2} & \geq & 0
\end{array} \qquad (P”)
$$

Schritt (I): Startlösung:

Schreibe (D”) kurz als:

$$
\text{(D):} \qquad \begin{array}{rrcl} & \min \tilde{b}^t y & & \\ \text{s.t.} & \tilde{A}^t y & = & \tilde{c} \\ & y & \geq & 0 \end{array}
$$

Und schreibe (P”) kurz als:

$$
\text{(P):} \qquad \begin{array}{rrcl} & \max \tilde{c}^t x & & \\ \text{s.t.} & \tilde{A}x + s & = & \tilde{b} \\ & s & \geq & 0 \end{array}
$$

Dabei ist $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{(m+2)\times(n+1)}$, $\tilde{b} \in \mathbb{R}^{m+1}$ und $\tilde{c} \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Und (Notationsmissbrauch): $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $y, s \in \mathbb{R}^{m+2}$.