Satz

Sei $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$ und $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\}$. Für $R = 1 + 2^{4n(\text{size}(A)+\text{size}(b))}$ und $\epsilon = \left(2n2^{4n(\text{size}(A)+\text{size}(b))}\right)^{-1}$ sei $P_{R,\epsilon} = \{x \in [-R, R]^n \mid Ax \le b + \epsilon \mathbb{1}\}$. Dann:

(a) $P = \emptyset \Leftrightarrow P_{R,\epsilon} = \emptyset$.

(b) Falls $P \ne \emptyset$, dann $\text{vol}(P_{R,\epsilon}) \ge \left(\frac{2\epsilon}{n2^{\text{size}(A)}}\right)^n$.

Separation und Optimierung

Problem: In manchen Fällen ist ein LP durch exponentiell viele Nebenbedingungen gegeben.

Beispiel: Betrachte das MATCHING-PROBLEM: Gegeben sei ein ungerichteter Graph G, gesucht ist möglichst große eine Menge $M \subseteq E(G)$ mit $|\delta_G(v) \cap M| \leq 1$ für alle $v \in V(G)$.

ILP-Formulierung:

$$\begin{array}{lrcll} \max & \sum_{e \in E(G)} x_e & & & \\ & \sum_{e \in \delta_G(v)} x_e & \leq & 1 & v \in V(G) \\ & x_e & \in & \{0,1\} & e \in E(G) \end{array}$$

Bei der LP-Relaxierung darf man folgende Nebenbedingungen einfügen:

$$\sum_{e \in E(G[U])} x_e \leq \frac{|U|-1}{2} \qquad U \subseteq V(G), |U| \text{ ungerade}$$

$\Rightarrow$ LP-Relaxierung des Matching-Problems kann so aussehen:

$$\begin{array}{rrcll}
\max & \sum_{e \in E(G)} x_e & & & \\
& \sum_{e \in \delta_G(v)} x_e & \leq & 1 & v \in V(G) \\
& \sum_{e \in E(G[U])} x_e & \leq & \frac{|U|-1}{2} & U \subseteq V(G), |U| \text{ ungerade} \\
& x_e & \geq & 0 & e \in E(G)
\end{array}$$

Betrachte ab jetzt abgeschlossene konvexe Mengen K, für die es Zahlen r und R mit $0 < r < \frac{R}{2}$ gibt, sodass $rB^n \subseteq K \subseteq RB^n$. Solche Mengen heißen **r-R-sandwiched Mengen**.

Wir betrachten das **schwache Optimierungsproblem**: Zu einer gegebenen Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$ und einem Vektor $c \in \mathbb{Q}^n$ suchen wir ein $x \in K$ mit $c^t x \geq \max\{c^t z \mid z \in K\} - \epsilon$.

Lemma

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine r-R-sandwiched konvexe Menge, $c \in \mathbb{R}^n$, $\delta = \sup\{c^t x \mid x \in K\}$ und $0 < \epsilon < \delta$. Außerdem sei $U = \{x \in K \mid c^t x \geq \delta - \epsilon\}$. Dann gilt:

$$\mathrm{vol}(U) \geq \left(\frac{\epsilon}{2\|c\|R}\right)^{n-1} r^{n-1} \frac{1}{n^n} \frac{\epsilon}{2\|c\|} \frac{1}{n}.$$

Beweis: Übung

Satz

Gegeben sei ein Separationsorakel für eine r-R-sandwiched konvexe Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Laufzeit polynomiell in $\text{size}(R)$, $\text{size}(r)$ und $\text{size}(x)$ (wobei x der Eingabevektor für das Orakel sei), eine Zahl $\epsilon > 0$ und ein Vektor c. Dann gibt es einen polynomiellen Algorithmus (bezüglich $size(R)$, $size(r)$, $\text{size}(c)$ und $size(\epsilon)$), der einen Vektor $v \in K$ mit $c^t v \geq \sup\{c^t x \mid x \in K\} - \epsilon$ berechnet.

Ein **schwaches Separationsorakel** für eine konvexe Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein Algorithmus, der zu gegebenem $x \in \mathbb{R}^n$ und η mit $0 < \eta < \frac{1}{2}$ entweder "$x \in K$" ausgibt oder einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ findet mit $v^t z \leq 1$ für alle $z \in K$ und $v^t x \geq 1 - \eta$.

Notation: Für $K \subseteq \mathbb{R}^n$ sei $K^* := \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^t x \leq 1 \text{ für alle } x \in K\}$.

Theorem

Wenn es einen Algorithmus mit Laufzeit polynomiell in $\mathrm{size}(r)$ und $\mathrm{size}(R)$ gibt, der lineare Zielfunktionen über einer abgeschlossenen konvexen r-R-sandwiched Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ maximiert, dann gibt es ein schwaches Separationsorakel für K, dessen Laufzeit polynomiell in $\mathrm{size}(r)$, $size(R)$ und $size(\eta)$ ist.