Algorithm 6: Idealized Ellipsoid Algorithm

Input: A separation oracle for a closed convex set $K \subseteq \mathbb{R}^n$, a number $R > 0$ with $K \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t x \leq R^2\}$, and a number $\epsilon > 0$.

Output: An $x \in K$ or the message “$\text{vol}(K) < \epsilon$”.

$p_0 := 0$, $A_0 := R^2 I_n$;

for $k = 0, \ldots, N(R, \epsilon) := \lfloor 2(n+1)(n \ln(2R) + \ln(\frac{1}{\epsilon})) \rfloor$ **do**

  if $p_k \in K$ **then**

    return p_k;

  Let $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ be a vector with $\bar{a}^t y > \bar{a}^t p_k$ for all $y \in K$;

  $b_k := \frac{A_k \bar{a}}{\sqrt{\bar{a}^t A_k \bar{a}}}$;

  $p_{k+1} := p_k + \frac{1}{n+1} b_k$;

  $A_{k+1} := \frac{n^2}{n^2-1}(A_k - \frac{2}{n+1} b_k b_k^t)$;

return “$\text{vol}(K) < \epsilon$”;

Theorem

Zu einem durch eine Separationsorakel gegebenem $K \subseteq \mathbb{R}^n$ $\epsilon > 0$, und R mit $K \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t x \leq R^2\}$ kann man mit $O(n(n \ln(R) + \ln(\frac{1}{\epsilon})))$ Iterationen des IDEALISIERTEN ELLIPSOID-VERFAHRENS ein $x \in K$ berechnen oder (korrekterweise) "$\mathrm{vol}(K) < \epsilon$" ausgeben. Jede Iteration benötigt einen Orakelaufruf, $O(n^2)$ arithmetische Standardoperationen und die Berechnung einer Quadratwurzel von einer reellen Zahl.

Fehler-Analyse

Problem:

Wir können in $b_k := \frac{A_k \bar{a}}{\sqrt{\bar{a}^t A_k \bar{a}}}$ die Wurzel nicht exakt ausrechnen.

$\Rightarrow$ Wir müssen mit gerundeten Zwischenlösungen rechnen.

$\widetilde{p_k}$ und $\widetilde{A_k}$: exakte Werte
p_k und A_k: gerundete Werte

Aber: $\widetilde{p_k}$ und $\widetilde{A_k}$ werden aus den gerundeten Werten p_{k-1} und A_{k-1} berechnet.

$\widetilde{E_k}$ und E_k seien die zugehörigen Ellipsoide

Sei δ eine obere Schranke für den absoluten Rundungsfehler, also $\|p_k - \widetilde{p_k}\|_\infty \leq \delta$ und $\|A_k - \widetilde{A_k}\|_\infty \leq \delta$.

Beim Runden der Einträge in $\widetilde{A_k}$ sorgen wir dafür, dass die Matrix symmetrisch bleibt.

Let $\Gamma_k = A_k - \widetilde{A_k}$ and $\Delta_k = p_k - \widetilde{p_k}$.

Es sei $\|\cdot\|$ für Vektoren die Euklidische Norm und für Matrizen die induzierte Operator-Norm.

Können annehmen:

Für jedes $x \in K$ gilt $(x - \widetilde{p}_k)^t \widetilde{A_k}^{-1} (x - \widetilde{p}_k) \leq 1$

Für p_k und A_k muss das aber nicht gelten.

$\Rightarrow$ Vergrößere das Ellipsoid in jeder Iteration leicht durch Skalierung von $\widetilde{A_k}$ um den Faktor $\mu = 1 + \frac{1}{2n(n+1)}$.

$\Rightarrow$ Ersetze $\widetilde{A_k}$ durch $\mu \widetilde{A_k}$ (und nenne das Ergebnis wieder $\widetilde{A_k}$!).

Dann:

$$(x - \widetilde{p}_k)^t \widetilde{A_k}^{-1} (x - \widetilde{p}_k) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2n(n+1)}} = \frac{2n^2 + 2n}{2n^2 + 2n + 1} < 1 - \frac{1}{4n^2}.$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
(x-p_k)^t A_k^{-1}(x-p_k) &= (x-p_k)^t \widetilde{A_k}^{-1}(x-p_k) + \\
&\quad (x-p_k)^t (A_k^{-1} - \widetilde{A_k}^{-1})(x-p_k).
\end{aligned}
$$

Beschränkung der Summanden:

$$
\begin{aligned}
& (x-p_k)^t \widetilde{A_k}^{-1}(x-p_k) \\
=\ & (x-\widetilde{p_k})^t \widetilde{A_k}^{-1}(x-\widetilde{p_k}) + |2\Delta_k^t \widetilde{A_k}^{-1}(x-\widetilde{p_k})| + \Delta_k^t \widetilde{A_k}^{-1}\Delta_k \\
\leq\ & 1 - \frac{1}{4n^2} + 2\|\Delta_k\| \cdot \|\widetilde{A_k}^{-1}\| \ (R + \|\widetilde{p_k}\|) + \|\Delta_k\|^2 \cdot \|\widetilde{A_k}^{-1}\| \\
\leq\ & 1 - \frac{1}{4n^2} + 2\sqrt{n}\delta \ \|\widetilde{A_k}^{-1}\| \ (R + \|\widetilde{p_k}\|) + n\delta^2 \|\widetilde{A_k}^{-1}\|.
\end{aligned}
$$

Und:

$$
\begin{aligned}
& (x-p_k)^t (A_k^{-1} - \widetilde{A_k}^{-1})(x-p_k) \\
\leq\ & \|x-p_k\|^2 \cdot \|A_k^{-1} - \widetilde{A_k}^{-1}\| \\
\leq\ & (R + \|p_k\|)^2 \ \|A_k^{-1}(A_k - \widetilde{A_k})\widetilde{A_k}^{-1}\| \\
\leq\ & (R + \|p_k\|)^2 \ \|A_k^{-1}\| \cdot \|\widetilde{A_k}^{-1}\| \cdot \|\Gamma_k\| \\
\leq\ & (R + \|p_k\|)^2 \ \|A_k^{-1}\| \cdot \|\widetilde{A_k}^{-1}\| \cdot n\delta
\end{aligned}
$$

Wunsch an δ

$$\begin{aligned} \frac{1}{4n^2} \quad &\geq \quad 2\sqrt{n}\delta \; \|\widetilde{A_k}^{-1}\| \; (R + \|\widetilde{p_k}\|) + n\delta^2 \|\widetilde{A_k}^{-1}\| \\ &\quad + (R + \|p_k\|)^2 \; \|A_k^{-1}\| \cdot \|\widetilde{A_k}^{-1}\| n\delta \end{aligned}$$

Auswirkungen der Skalierung auf das Volumen

$\widetilde{E_{k+1}}$ gehöre zur skalierten Version von $\widetilde{A_k}$:

$$\frac{\operatorname{vol}(\widetilde{E_{k+1}})}{\operatorname{vol}(E_k)} \leq e^{-\frac{1}{2(n+1)}} \left(1 + \frac{1}{2n(n+1)}\right)^{\frac{n}{2}} \leq e^{-\frac{1}{2(n+1)}} e^{\frac{1}{4(n+1)}} = e^{-\frac{1}{4(n+1)}}.$$

Dann

$$\frac{\operatorname{vol}(E_{k+1})}{\operatorname{vol}(E_k)} = \frac{\operatorname{vol}(\widetilde{E_{k+1}})}{\operatorname{vol}(E_k)} \frac{\operatorname{vol}(E_{k+1})}{\operatorname{vol}(\widetilde{E_{k+1}})} \leq e^{-\frac{1}{4(n+1)}} \sqrt{\det(A_{k+1}\widetilde{A_{k+1}}^{-1})}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\det(A_{k+1}\widetilde{A_{k+1}}^{-1}) &= \det\left(I_n + (A_{k+1} - \widetilde{A_{k+1}})\widetilde{A_{k+1}}^{-1}\right) \\
&\overset{(*)}{\leq} \|I_n + (A_{k+1} - \widetilde{A_{k+1}})\widetilde{A_{k+1}}^{-1}\|^n \\
&\leq (1 + \|\Gamma_{k+1}\| \cdot \|\widetilde{A_{k+1}}^{-1}\|)^n \\
&\leq (1 + n\delta\|\widetilde{A_{k+1}}^{-1}\|)^n \\
&\leq e^{n^2\delta\|\widetilde{A_{k+1}}^{-1}\|},
\end{aligned}$$

wobei Ungleichung $(*)$ daraus folgt, dass für eine $n \times n$-Matrix A mit Spalten $a_1, \ldots, a_n$ gilt: $|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^n \|a_i\|$ (siehe Übungen).

Daraus folgt:

$$\frac{\mathrm{vol}(E_{k+1})}{\mathrm{vol}(E_k)} \le e^{-\frac{1}{4(n+1)}} \cdot e^{\frac{1}{2}n^2\delta\|\widetilde{A_{k+1}}^{-1}\|}.$$

$\Rightarrow$ Wenn $\frac{1}{2}\delta\|\widetilde{A_{k+1}}^{-1}\| < \frac{1}{8(n+1)^3}$ gilt, dann folgt $\frac{\mathrm{vol}(E_{k+1})}{\mathrm{vol}(E_k)} < e^{-\frac{1}{8(n+1)}}$.

$\Rightarrow$ Neuer Wunsch:

$\delta\|\widetilde{A_{k+1}}^{-1}\| \le \frac{1}{4(n+1)^3}$

$\Rightarrow$ Unser Ziel ist δ so zu wählen, dass die folgenden Ungleichungen gelten:

- $2\sqrt{n}\delta \; \|\widetilde{A_k}^{-1}\| \; (R + \|\widetilde{p_k}\|) + n\delta^2\|\widetilde{A_k}^{-1}\| + (R + \|p_k\|)^2 \; \|A_k^{-1}\| \cdot \|\widetilde{A_k}^{-1}\| n\delta \quad \leq \quad \frac{1}{4n^2}$
- $\delta\|\widetilde{A_{k+1}}^{-1}\| \quad \leq \quad \frac{1}{4(n+1)^3}$

Satz

Es sei in Iteration k der ELLIPSOID-METHODE $\delta \leq \frac{1}{12n4^k}$ gewählt. Dann gilt:

(a) A_k ist positiv definit.

(b) $\|p_k\| \leq R2^k$, $\|\widetilde{p_k}\| \leq R2^k$.

(c) $\|A_k\| \leq R^2 2^k$, $\|\widetilde{A_k}\| \leq R^2 2^k$.

(d) $\|A_k^{-1}\| \leq R^{-2}4^k$, $\|\widetilde{A_k}^{-1}\| \leq R^{-2}4^k$.

Beweis:

Es gilt

$$\widetilde{A_{k+1}}^{-1} = \frac{n^2-1}{n^2}\frac{1}{\mu}\left(\underbrace{A_k^{-1}}_{pos.\ def.} + \underbrace{\frac{2}{n-1}\frac{\bar{a}\bar{a}^t}{\bar{a}^t A_k \bar{a}}}_{pos.\ semidef.}\right).$$

$\Rightarrow \widetilde{A_{k+1}}^{-1}$ ist positiv definit.

$\Rightarrow \widetilde{A_{k+1}} = \frac{n^2}{n^2-1}\mu(A_k - \frac{2}{n+1}b_k b_k^t)$ ist positiv definit.

Zeige induktiv:

- A_k ist positiv definit und
- $\|A_k{}^{-1}\| \le R^{-2}4^k$.

Es gilt: $\|\frac{\bar{a}\bar{a}^t}{\bar{a}^t A_k \bar{a}}\| = \frac{\bar{a}^t\bar{a}}{\bar{a}^t A_k \bar{a}} \le \left(\min\{x^t A_k x \mid \|x\| = 1\}\right)^{-1} \le \|A_k^{-1}\|$.

Daher:

$$\|\widetilde{A_{k+1}}^{-1}\| \le \frac{n^2-1}{n^2}\frac{1}{\mu}\left(\|A_k^{-1}\| + \frac{2}{n-1}\|\frac{\bar{a}\bar{a}^t}{\bar{a}^t A_k \bar{a}}\|\right) \le 3\|A_k{}^{-1}\|$$

A regulär, pos. def.

$$\|A\| = \max \{ u^t A u : \|u\| = 1 \}$$

$$= \max \{ |\lambda| : \lambda \text{ Eigenwert von } A \}$$

$$\|A^{-1}\| = \frac{1}{\min \{ |\lambda| : \lambda \text{ Eigenwert} \}} = \frac{1}{\min \{ u^t A u : \|u\| = 1 \}}$$

Beweis (Fortsetzung):
Sei λ kleinster Eigenwert von A_{k+1} und v ein Vektor mit $\|v\| = 1$ und $\lambda = v^t A_{k+1} v$. Dann:

$$
\begin{aligned}
v^t A_{k+1} v \quad &\geq \quad v^t \widetilde{A_{k+1}} v - n\delta \\
&\geq \quad \min\{u^t \widetilde{A_{k+1}} u \mid u \in \mathbb{R}^n, \|u\| = 1\} - n\delta \\
&\geq \quad \frac{1}{\|\widetilde{A_{k+1}}^{-1}\|} - n\delta \\
&\geq \quad \frac{1}{3\|A_k{}^{-1}\|} - n\delta \\
&\geq \quad \frac{1}{3}\frac{1}{R^{-2}4^k} - n\delta \\
&\geq \quad \frac{1}{R^{-2}4^{k+1}},
\end{aligned}
$$

falls folgendes gilt:

$$
n\delta \leq \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)\frac{R^2}{4^k}. \quad = \frac{1}{12} \cdot \frac{R^2}{4^k} \qquad (16)
$$

$$A_{k+1} = \frac{n^2}{n^2-1}\mu\left(A_k - \frac{2}{n+1} b_k b_k^t\right)$$

Beweis (Fortsetzung):

Daher ist A_{k+1} positiv definit. $\Rightarrow$ (a)

Und wegen $\|A_0^{-1}\| = R^{-2}$ und $\frac{1}{\|A_{k+1}^{-1}\|} = v^t A_{k+1} v$ folgt

$\|A_{k+1}^{-1}\| \le R^{-2}4^{k+1}$

Mit $\|\widetilde{A_{k+1}}^{-1}\| \le 3\|A_k{}^{-1}\|$ folgt auch $\|\widetilde{A_{k+1}}^{-1}\| \le R^{-2}4^{k+1}$. $\Rightarrow$ (d).

Es gilt $\|\widetilde{A_{k+1}}\| \le \frac{n^2}{n^2-1}\mu\|A_k\|$, weil $\|A\| \le \|A+B\|$ für positiv semidefinite Matrizen A und B gilt (siehe Übungen).

Daher induktiv (mit $\|A_0\| = R^2$):

$$\|A_{k+1}\| \le \|\widetilde{A_{k+1}}\| + \|\Gamma_{k+1}\| \le \underbrace{\frac{n^2}{n^2-1}\mu}_{\le \frac{3}{2}}\|A_k\| + n\delta \le R^2 2^{k+1}$$

Und: $\|\widetilde{A_{k+1}}\| \le \frac{n^2}{n^2-1}\mu\|A_k\| \le R^2 2^{k+1}$. $\Rightarrow$ (c).

Beweis (Fortsetzung):
Schreibe $A_k = MM^t$ mit regulärer Matrix M. Dann:

$$\|b_k\| = \frac{\|A_k\bar{a}\|}{\sqrt{\bar{a}^t A_k \bar{a}}} = \sqrt{\frac{\bar{a}^t A_k A_k \bar{a}}{\bar{a}^t A_k \bar{a}}} = \sqrt{\frac{(M^t\bar{a})^t A_k (M^t\bar{a})}{(M^t\bar{a}^t)(M^t\bar{a})}} \overset{(*)}{\leq} \sqrt{\|A_k\|} \leq R2^{\frac{k}{2}},$$

wobei $(*)$ gilt, weil $\|A_k\| = \max\{x^T A_k x \mid \|x\| = 1\}$ für positive semidefinite Matrizen A_k gilt (siehe Übungen).
Also induktiv (mit $p_0 = 0$):

$$\|p_{k+1}\| \leq \|p_k\| + \frac{1}{n+1}\|b_k\| + \sqrt{n}\delta \leq \|p_k\| + R2^{\frac{k}{2}} + \sqrt{n}\delta \leq R2^k + R2^{\frac{k}{2}} + \frac{1}{3\sqrt{n}4^k} \leq R2^{k+1}.$$

$$\Rightarrow \|\widetilde{p_{k+1}}\| \leq \underbrace{\|p_k\|}_{\leq R2^k} + \frac{1}{n+1}\underbrace{\|b_k\|}_{\leq R2^{\frac{K}{2}}} \leq R2^{k+1}. \Rightarrow \text{(b)}.$$

$\square$

Algorithm 7: Ellipsoid Algorithm

Input: A separation oracle for a closed convex set $K \subseteq \mathbb{R}^n$, a number $R > 0$ with $K \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t x \leq R^2\}$, and a number $\epsilon > 0$

Output: An $x \in K$ or the message "$\mathrm{vol}(K) < \epsilon$".

```
p_0 := 0, A_0 := R^2 I_n;
for k = 0, ..., N(R, ε) := ⌈8(n + 1)(n ln(2R) + ln(1/ε))⌉ do
    if p_k ∈ K then
        return p_k;
    Let ā ∈ ℝ^n be a vector with ā^t y > ā^t p_k for all y ∈ K;
    b_k := A_k ā / sqrt(ā^t A_k ā);
    p_{k+1} an approximation of ~p_{k+1} := p_k + 1/(n+1) b_k with maximum error
        δ < (2^{6(N(R,ε)+1)} 16 n^3)^{-1};
    A_{k+1} a symmetric approximation of
        ~A_{k+1} := (1 + 1/(2n(n+1))) n^2/(n^2 - 1) (A_k - 2/(n+1) b_k b_k^t) with maximum error δ;
return "vol(K) < ε";
```

$$p_0 := 0,\ A_0 := R^2 I_n;$$

$$\textbf{for } k = 0, \ldots, N(R,\epsilon) := \left\lceil 8(n+1)\left(n \ln(2R) + \ln\left(\tfrac{1}{\epsilon}\right)\right)\right\rceil \textbf{ do}$$

$$\textbf{if } p_k \in K \textbf{ then return } p_k;$$

$$\text{Let } \bar{a} \in \mathbb{R}^n \text{ be a vector with } \bar{a}^t y > \bar{a}^t p_k \text{ for all } y \in K;$$

$$b_k := \frac{A_k \bar{a}}{\sqrt{\bar{a}^t A_k \bar{a}}};$$

$$p_{k+1} \text{ an approximation of } \widetilde{p_{k+1}} := p_k + \frac{1}{n+1} b_k \text{ with maximum error } \delta < \left(2^{6(N(R,\epsilon)+1)} 16 n^3\right)^{-1};$$

$$A_{k+1} \text{ a symmetric approximation of } \widetilde{A_{k+1}} := \left(1 + \frac{1}{2n(n+1)}\right)\frac{n^2}{n^2-1}\left(A_k - \frac{2}{n+1} b_k b_k^t\right) \text{ with maximum error } \delta;$$

$$\textbf{return } \text{"}\mathrm{vol}(K) < \epsilon\text{"};$$

Lemma

Let δ be positive with $\delta < \left(2^{6(N(R,\epsilon)+1)}16n^3\right)^{-1}$ where $N(R,\epsilon) := \lceil 8(n+1)(n\ln(2R)+\ln(\frac{1}{\epsilon}))\rceil$. Then, in iteration k of the Ellipsoid Algorithm, we have $K \subseteq p_k + E_k$ and $\mathrm{vol}(E_k) < e^{-\frac{k}{8(n+1)}}2^nR^n$.

Beweis: Nach Wahl von δ gilt $n\delta \leq \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\frac{R^2}{4^k}$.
Außerdem:

- $2\sqrt{n}\delta \underbrace{\|\widetilde{A_k}^{-1}\|}_{\leq R^{-2}4^k}(R+\underbrace{\|\widetilde{p_k}\|}_{\leq R2^k})+n\delta^2\underbrace{\|\widetilde{A_k}^{-1}\|}_{\leq R^{-2}4^k}+(R+\underbrace{\|p_k\|}_{\leq R2^k})^2\underbrace{\|A_k^{-1}\|}_{\leq R^{-2}4^k}\cdot\underbrace{\|\widetilde{A_k}^{-1}\|}_{\leq R^{-2}4^k}n\delta \leq \delta n 2^{6k} \leq \frac{1}{4n^2}$
- $\delta \underbrace{\|\widetilde{A_{k+1}}^{-1}\|}_{\leq R^{-2}4^k} \leq \frac{1}{4(n+1)^3}$

$\Rightarrow$ E_k (gerundet) enthält immer K, und das Volumen von E_k wird in jeder Iteration um mindestens den Faktor $e^{-\frac{1}{8(n+1)}}$ reduziert.
$\Rightarrow$ Nach $O\left(n\left(n\ln R+\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)\right)$ Iterationen endet der Algorithmus mit korrekter Ausgabe. $\square$

Theorem

Für eine kompakte konvexe Menge $K \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t x \leq R^2\}$, die durch ein Separationsorakel gegeben ist, findet die ELLIPSOID-METHODE entweder einen Vektor $x \in K$ oder gibt die Meldung "$\text{vol(K)} \leq \epsilon$" aus. Sie benötigt $O\left(n\left(n \ln R + \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)\right)$ Iterationen, und in jeder Iteration werden ein Orakelaufruf, die approximative Berechnung einer Quadratwurzel und $O(n^2)$ arithmetische Operationen auf $O\left(n\left(n \ln R + \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)\right)$ Bits ausgeführt.

□

Die Ellipsoid-Methode für die Lineare Programmierung

Satz

Sei $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$ und $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Für $R = 1 + 2^{4n(\mathrm{size}(A)+\mathrm{size}(b))}$ und $\epsilon = \left(2n2^{4n(\mathrm{size}(A)+\mathrm{size}(b))}\right)^{-1}$ sei $P_{R,\epsilon} = \{x \in [-R, R]^n \mid Ax \leq b + \epsilon \mathbb{1}\}$. Dann:

$\mathbb{1} = (1, \ldots, 1)$

(a) $P = \emptyset \Leftrightarrow P_{R,\epsilon} = \emptyset$.

(b) Falls $P \neq \emptyset$, dann $\mathrm{vol}(P_{R,\epsilon}) \geq \left(\frac{2\epsilon}{n2^{\mathrm{size}(A)}}\right)^n$.

Beweis: (a) „$P = \emptyset \Longrightarrow P_{R,\epsilon} = \emptyset$"

Und: wenn es einen Vektor in P gibt, dann gibt es auch einen mit

$\mathrm{size} \leq 4n(\mathrm{size}(A) + \mathrm{size}(b)))$

Also: „$P_{R,0} = \emptyset \Rightarrow P = \emptyset$"

„$P_{R,\varepsilon} = \emptyset \Rightarrow P_{R,0} = \emptyset$"

Bleibt zu zeigen: „$P = \emptyset \Rightarrow P_{R,\varepsilon} = \emptyset$"

Sei: $P = \emptyset$. $\Rightarrow$ $Ax \leq b$ hat keine Lösung

Farkas Lemma: Es gibt einen Vektor

$y \geq 0$ mit $y^t A = 0$, $y^t b = -1$

Betrachte

$$\begin{aligned} \min\ & \mathbb{1}^t y \\ & A^t y = 0 \\ & b^t y = -1 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Dieses LP hat eine Optimallösung y, sodass jeder Eintrag von y betragsmäßig höchstens $2^{4n(size(A)+size(b))}$ ist.

$$\Longrightarrow y^T(b+\varepsilon\mathbb{1}) \leq -1+(n+1)\cdot 2^{4n(size(A)+size(b))}\cdot\varepsilon$$

$$< 0$$

Farkas
$\Longrightarrow$ y ist ein Zertifikat dafür, dass $Ax \leq b+\varepsilon\mathbb{1}$ keine Lösung hat

$\Longrightarrow P_{P,\varepsilon} = \emptyset.$

(6) Falls $P \neq \emptyset$, dann gilt auch

$P_{R-1,0} \neq \emptyset$

Für jedes $z \in P_{R-1,0}$ gilt:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - z\|_\infty < \frac{\varepsilon}{n \cdot 2^{size(A)}}\} \subseteq P_{R,\varepsilon}$$

$$\Rightarrow vol(P_{R,\varepsilon}) \geq vol(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - z\|_\infty < \frac{\varepsilon}{n 2^{size(A)}}\})$$

$$= \left(\frac{2\varepsilon}{n \cdot 2^{size(A)}}\right)^n \qquad \square$$