Schnittebenen-Verfahren

Lemma

Sei $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^t x \leq \delta\}$ ein rationaler Halbraum, sodass die Komponenten von c teilerfremd sind. Dann gilt $H_I = H' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^t x \leq \lfloor \delta \rfloor\}$.

Schnittebenen-Verfahren

Satz

Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ein rationales Polyeder. Dann gilt

$$P' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid u^t Ax \leq \lfloor u^t b \rfloor \text{ für alle } u \geq 0 \text{ mit } u^t A \text{ ganzzahlig}\}.$$

Schnittebenen-Verfahren

Satz

Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ein rationales Polyeder. Dann gilt

$$P' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid u^t Ax \leq \lfloor u^t b \rfloor \text{ für alle } u \geq 0 \text{ mit } u^t A \text{ ganzzahlig}\}.$$

Beweis: "$\subseteq$:" Für jedes $u \geq 0$ gilt $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid u^t Ax \leq u^t b\}$.
Wenn außerdem $u^t A$ ganzzahlig ist, folgt

$$P' \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid u^t Ax \leq u^t b\}_I \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid u^t Ax \leq \lfloor u^t b \rfloor\}.$$

Schnittebenen-Verfahren

Beweis (Fortsetzung):

"$\supseteq$:" O.B.d.A gelte

$X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid u^t A x \leq \lfloor u^t b \rfloor$ für alle $u \geq 0$ mit $u^t A$ ganzzahlig$\} \neq \emptyset$.

Dann gilt auch $P \neq \emptyset$.

Sei $z \in X$.

Zu zeigen: z ist für jeden Halbraum $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^t x \leq \delta\}$ mit $c \in \mathbb{Q}^n$, $\delta \in \mathbb{Q}$ und $P \subseteq H$ in H_I enthalten.

Können annehmen: die Komponenten von c sind teilerfremde ganze Zahlen

Das LP $\max\{c^t x \mid Ax \leq b\}$ ist zulässig und (durch δ) beschränkt.

$\Rightarrow$

$$\max\{c^t x \mid Ax \leq b\} = \min\{u^t b \mid A^t u = c, u \geq 0\}.$$

Sei $\tilde{u}$ eine Optimallösung des Minimierungsproblems.

Weil $\tilde{u}^t A = c^t$ ganzzahlig ist, folgt $\tilde{u}^t A z \leq \lfloor \tilde{u}^t b \rfloor$, also

$$c^t z = \tilde{u}^t A z \leq \lfloor \tilde{u}^t b \rfloor \leq \lfloor \delta \rfloor.$$

Voriges Lemma: $z \in H_I$.

Dies gilt für jeden Halbraum H, der P enthält. $\Rightarrow z \in P'$. $\square$

Schnittebenen-Verfahren

Theorem

Sei $Ax \leq b$ mit $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$ ein TDI-System. Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Dann gilt $P' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq \lfloor b \rfloor\}$.

Schnittebenen-Verfahren

Theorem

Sei $Ax \leq b$ mit $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$ ein TDI-System. Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Dann gilt $P' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq \lfloor b \rfloor\}$.

Beweis: "$P' \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq \lfloor b \rfloor\}$:"
Jede Gleichung in $Ax \leq b$ liefert einen Halbraum H, und die entsprechende Ungleichung in $Ax \leq \lfloor b \rfloor$ liefert einen Halbraum, der H_I und damit P' enthält.

Schnittebenen-Verfahren

Beweis (Fortsetzung):
“$P' \supseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq \lfloor b \rfloor\}$:”
Können annehmen: $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq \lfloor b \rfloor\} \neq \emptyset$.
Sei $\tilde{x} \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq \lfloor b \rfloor\}$, und sei $u \geq 0$, sodass $u^t A$ ganzzahlig ist.

Voriger Satz: Wir müssen zeigen, dass $u^t A\tilde{x} \leq \lfloor u^t b \rfloor$.

Das LP $\max\{u^t Ax \mid Ax \leq b\}$ ist zulässig und (durch $u^t b$) beschränkt.
$\Rightarrow$

$$\max\{u^t Ax \mid Ax \leq b\} = \min\{b^t y \mid y \geq 0, y^t A = u^t A\}.$$

$Ax \leq b$ ist TDI $\Rightarrow$ das Minimum von einem ganzzahligen Vektor $\tilde{y}$ angenommen. Daher

$$u^t A\tilde{x} \quad = \quad \tilde{y}^t A\tilde{x} \quad \leq \quad \tilde{y}^t \lfloor b \rfloor \quad \leq \quad \lfloor \tilde{y}^t b \rfloor \quad \leq \quad \lfloor u^t b \rfloor.$$

$\Rightarrow P' \supseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq \lfloor b \rfloor\}$. □

Korollar

Wenn P ein rationales Polyeder ist, dann ist P' ein Polyeder.

Beweis: Jedes rationale Polyeder P kann geschrieben werden als $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ mit A ganzzahlig und b rational, sodass $Ax \leq b$ TDI ist. Damit folgt die Aussage aus dem vorigen Theorem. $\square$

Schnittebenen-Verfahren

Lemma

Für jede Fläche F rationalen Polyeders P gilt $F' = F \cap P'$.

Schnittebenen-Verfahren

Lemma

Für jede Fläche F rationalen Polyeders P gilt $F' = F \cap P'$.

Beweis: Sei P ein rationales Polyeder. $\Rightarrow$ Wir können P schreiben als $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ mit A ganzzahlig, b rational und $Ax \leq b$ TDI.

Sei $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, a^t x = \beta\}$ eine Fläche von P, wobei $a^t x \leq \beta$ mit ganzzahligem a und β eine gültige Ungleichung für P sei.
$\Rightarrow$ $Ax \leq b, a^t x \leq \beta$ ist TDI.
$\Rightarrow$ $Ax \leq b, a^t x = \beta$ is TDI.
β ist ganzzahlig $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} P' \cap F &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq \lfloor b \rfloor, a^t x = \beta\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq \lfloor b \rfloor, a^t x \leq \lfloor \beta \rfloor, a^t x \geq \lceil \beta \rceil\} \\ &= F'. \end{aligned}$$

Voriges Theorem

$\square$

Schnittebenen-Verfahren

Korollar

Für jede Fläche F eines rationalen Polyeders P gilt $F^{(i)} = F \cap P^{(i)}$.

Korollar

Für jede Fläche F eines rationalen Polyeders P gilt $F^{(i)} = F \cap P^{(i)}$.

Beweis: Sei P ein rationales Polyeder und F eine Fläche von P.

Zeige induktiv in i: $F^{(i)}$ ist leer oder eine Fläche von $P^{(i)}$ und es gilt $F^{(i)} = F \cap P^{(i)}$.

$i = 1$: Voriges Lemma

Für $i > 1$ gilt:
$F^{(i)} = (F^{(i-1)})' = (P^{(i-1)})' \cap F^{(i-1)} = P^{(i)} \cap (P^{(i-1)} \cap F) = P^{(i)} \cap F$. $\square$

Schnittebenen-Verfahren

Lemma

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polyeder, U eine unimodulare $n \times n$-Matrix und $f(X) = \{Ux \mid x \in X\}$ für alle $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist $f(P)$ ein Polyeder. Wenn außerdem P rational ist, gilt $(f(P))' = f(P')$ und $(f(P))_I = f(P_I)$.

Beweis:

Wenn $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$, dann $f(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid AU^{-1}x \leq b\}$ also ist $f(P)$ dann ein Polyeder.

Sei P außerdem rational.

U unimodular $\Rightarrow$ Ux ist genau dann ganzzahlig, wenn x ganzzahlig ist.

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
(f(P))_I &= \operatorname{conv}(\{y \in \mathbb{Z}^n \mid y = Ux, x \in P\}) \\
&= \operatorname{conv}(\{y \in \mathbb{R}^n \mid y = Ux, x \in P, x \in \mathbb{Z}^n\}) \\
&= \operatorname{conv}(\{y \in \mathbb{R}^n \mid y = Ux, x \in P_I\}) \\
&= f(P_I).
\end{aligned}$$

Beweis (Fortsetzung):
Können annehmen: $Ax \leq b$ ist TDI, A ist ganzzahlig und b ist rational.

$\Rightarrow$ Für jeden Vektor $c \in \mathbb{Z}^n$, für den $\min\{b^t y \mid y^t AU^{-1} = c^t, y \geq 0\}$ zulässig und beschränkt ist, ist auch $\min\{b^t y \mid y^t A = c^t U, y \geq 0\}$ zulässig und beschränkt und $c^t U$ ganzzahlig.

$\Rightarrow$ $AU^{-1}x \leq b$ ist TDI.
$\Rightarrow$

$$(f(P))' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid AU^{-1}x \leq b\}' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid AU^{-1}x \leq \lfloor b \rfloor\} = f(P').$$

$\square$

Schnittebenen-Verfahren

Theorem

Für jedes rationale Polyeder P gibt es eine Zahl t mit $P^{(t)} = P_I$.

Beweis:
Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein rationales Polyeder.
Zeige die Aussage per Induktion in $n + \dim(P)$.

Der Fall $\dim(P) = 0$ ist trivial.

Schnittebenen-Verfahren

Beweis (Fortsetzung):
Fall 1: $\dim(P) < n$.
$\Rightarrow$ Es gibt eine rationale Hyperebene $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^t x = \beta\}$ mit $P \subseteq K$
O.B.d.A.: Die Einträge von a sind teilerfremde ganze Zahlen.

Falls $K \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$, dann kann β nicht ganzzahlig sein. Dann gilt,

$$P' \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^t x \leq \lfloor\beta\rfloor, a^t x \geq \lceil\beta\rceil\} = \emptyset = P_I.$$

Also: K enthalte ganzzahligen Vektor y.
Können annehmen: $0 \in K$; denn die Aussage gilt genau dann für P, wenn sie für $P - y$ gilt.
$\Rightarrow \beta = 0$.

Schnittebenen-Verfahren

Beweis (Fortsetzung):
Bringe die $1 \times n$-Matrix a^t durch elementare unimodulare Spaltenoperationen in Hermitesche Normalform, also in die Form αe_1^t.

$\Rightarrow$ Es gibt eine unimodulare quadratische Matrix U mit $a^t U = \alpha e_1^t$.

Voriges Lemma: Theorem ist invariant unter der Abbildung $x \mapsto U^{-1} x$.

$\Rightarrow$ Können annehmen: $a^t = \alpha e_1^t$.
$\Rightarrow$ $P = \{0\} \times Q$ für ein Polyeder $Q \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$.

Wende Induktionsvoraussetzung auf Q an.
Wegen $(\{0\} \times Q)_I = \{0\} \times Q_I$ und $(\{0\} \times Q)^{(t)} = \{0\} \times Q^{(t)}$ für jedes $t \in \mathbb{N}$ folgt die Aussage.

Beweis (Fortsetzung):
Fall 2: $\dim(P) = n$.
Schreibe P als $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ mit A ganzzahlig.

P ist rational, also ist P_I ein rationales Polyeder.

Können P_I schreiben als $P_I = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx \leq d\}$ mit C ganzzahlig und d rational.

$(1\,1 \ldots 1)$

Falls $P_I = \emptyset$, wähle $C = A$ und $d = b - A'\mathbb{1}_n$, wobei A' aus A entstehe, indem man jeden Eintrag durch seinen Absolutbetrag ersetzt.
Es gilt $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax + A'\mathbb{1}_n \leq b\} = \emptyset$, weil jeder Vektor x^* mit $Ax^* + A'\mathbb{1}_n \leq b$ zu einem ganzzahligen Vektor x mith $Ax \leq b$ abgerundet werden könnte.

Beweis (Fortsetzung):
Sei $c^t x \leq \delta$ eine Ungleichung in $Cx \leq d$.
Behauptung: Es gibt ein $s \in \mathbb{N}$ mit $P^{(s)} \subseteq H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^t x \leq \delta\}$.
Daraus folgt direkt das Theorem.

Beweis der Behauptung:
Es gibt $\beta \geq \delta$ mit $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^t x \leq \beta\}$. Denn: Wenn $P_I = \emptyset$, gilt dies nach Konstruktion. Falls $P_I \neq \emptyset$, gilt es, weil $c^t x$ über P genau dann beschränkt ist, wenn es über P_I beschränkt ist.

Annahme: Die Behauptung ist falsch.
$\Rightarrow$ Es gibt $\gamma \in \mathbb{Z}$ mit $\delta < \gamma \leq \beta$, sodass es ein $s_0 \in \mathbb{N}$ mit $P^{(s_0)} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^t x \leq \gamma\}$ gibt, aber kein $s \in \mathbb{N}$ mit $P^{(s)} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^t x \leq \gamma - 1\}$.
Dann gilt $\max\{c^t x \mid x \in P^{(s)}\} = \gamma$ für alle $s \geq s_0$.
Denn: Nimm an, dass $\max\{c^t x \mid x \in P^{(s)}\} < \gamma$ für ein s gilt.
Dann gilt $\max\{c^t x \mid x \in P^{(s+1)}\} \leq \gamma - 1$, weil $\{x \in \mathbb{R}^n \mid c^t x \leq \gamma - \epsilon\}_I \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^t x \leq \gamma - 1\}$. Widerspruch

Beweis (Fortsetzung):
Definiere $F := P^{(s_0)} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^t x = \gamma\}$.
$\Rightarrow \dim(F) < n = \dim(P)$.
Induktionsvoraussetzung: Es gibt ein Zahl s_1 mit $F^{(s_1)} = F_I$. Daher:

$$F^{(s_1)} \;=\; F_I \;\subseteq\; P_I \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^t x = \gamma\} \;=\; \emptyset.$$

F ist Fläche von $P^{(s_0)}$, also:

$$\emptyset \;=\; F^{(s_1)} \;=\; P^{(s_0+s_1)} \cap F \;=\; P^{(s_0+s_1)} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^t x = \gamma\}.$$

Es folgt $\max\{c^t x \mid x \in P^{(s_0+s_1)}\} < \gamma$, was ein Widerspruch ist. $\square$