Sommersemester 2018
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
11. Übung

1. Gegeben sei eine Permutation $a_1a_2\dots a_n$ von $\{1,\dots,n\}$. Eine *Inversion* ist ein Paar a_i, a_j mit $i<j$ aber $a_i > a_j$. Zum Beispiel hat 1 4 3 5 2 die Inversionen 4,3; 4,2: 3,2; 5,2. Es sei $I_{n,k}$ die Zahl der Permutationen von $\{1,\dots,n\}$ mit genau k Inversionen. Zeigen Sie:
   (a) $I_{n,0} = 1$.
   (b) $I_{n,k} = I_{n,\binom{n}{2}-k}$ für $k = 0,\dots,\binom{n}{2}$.
   (c) $I_{n,k} = I_{n-1,k} + I_{n,k-1}$ für $k < n$. Gilt dies auch für $k = n$?
   (d) $\sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} (-1)^k I_{n,k} = 0$ für $n \geq 2$. (1+1+2+2 Punkte)

2. Zeigen Sie:
   (a) $s_{n+1,k+1} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} s_{n,i}$,
   (b) $S_{n+1,k+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} S_{i,k}$. (2+2 Punkte)

3. Zeigen Sie durch ein kombinatorisches Argument, dass für $1 \leq k \leq n$ gilt:
$$kS_{n,k} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} S_{n-i,k-1}.$$
(2 Punkte)

4. Es sei $\tilde{S}_{n,k}$ die Zahl der Möglichkeiten, eine n-elementige Menge so in k Mengen aufzuteilen, dass jede Menge mindestens zwei Elemente enthält
   (a) Berechnen Sie $\tilde{S}_{2k,k}$.
   (b) Finden Sie eine Rekursionsformel für $\tilde{S}_{n,k}$ mit $n > 2k$. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Formel. (2+2 Punkte)

Homepage der Übung:
`http://www.or.uni-bonn.de/lectures/ss18/kgm_uebung_ss18.html`
Abgabe: Dienstag, den 3.7.2018, vor der Vorlesung.