Sommersemester 2017
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
9. Übung

1. Betrachten Sie den Greedy-Knotenfärbungsalgorithmus, in dem die Knoten in irgendeiner Reihenfolge durchlaufen werden und jeder Knoten die kleinste noch nicht an seinen schon gefärbten Nachbarn benutzte Farbe bekommt. Zeigen Sie, dass es für jedes $n \geq 2$ einen Graphen G mit $|V(G)| = 2n$ und $\chi(G) = 2$ gibt, so dass, wenn die Knoten in einer geeigneten Reihenfolge durchlaufen werden, der Greedy-Algorithmus n Farben benötigt. Zeigen Sie umgekehrt, dass es für jeden Graphen G eine Sortierung der Knoten gibt, so dass, wenn der Greedy-Algorithmus die Knoten in dieser Reihenfolge betrachtet, er nur $\chi(G)$ Farben benötigt. (2 Punkte)

2. Sei G ein regulärer Graph (d.h. alle Knotengrade sind gleich) mit ungerader Knotenzahl, und H entstehe aus G durch Löschen von höchstens $\frac{\Delta(G)}{2} - 1$ Kanten (insbesondere könnte $G = H$ gelten). Zeigen Sie, dass dann $\chi'(H) = \Delta(H) + 1$ gilt. (4 Punkte)

3. Für einen einfachen Graphen G sei $t(G)$ die kleinste Zahl, für die es planare Graphen $G_1, \dots, G_{t(G)}$ gibt, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

   - $V(G_i) = V(G)$ $(i \in \{1, \dots, t(G)\})$,
   - $E(G) = \bigcup_{i=1}^{t(G)} E(G_i)$.

   Ein Graph G ist also genau dann planar, wenn $t(G) = 1$ gilt.

   (a) Zeigen Sie, dass $t(K_n) \geq \lfloor \frac{n+7}{6} \rfloor$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt.

   (b) Zeigen Sie, dass es Graphen G mit $t(G) = 2$ und $\chi(G) = 8$ gibt.

   (c) Geben Sie eine möglichst gute obere Schranke für den folgenden Wert an:

   $$\max\{\chi(G) \mid t(G) = 2\}.$$

   Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Schranke. (2+2+2 Punkte)

4. Es sei G ein einfacher ungerichteter Graph mit Farblisten C_v (für alle Knoten $v \in V(G)$) mit jeweils genau $\Delta(G)$ Elementen. Für je zwei Knoten $v, w \in V(G)$ gelte $C_v \cap C_w \neq \emptyset$. Außerdem gebe es zwei Knoten x und y, die nicht benachbart sind, aber einen gemeinsamen Nachbarn haben, und für die $G - \{x, y\}$ zusammenhängend sei. Zeigen Sie, dass es dann eine zulässige Listenfärbung $c : V(G) \to \bigcup_{v \in V(G)} C_v$ gibt. (4 Punkte)

Homepage der Übung:
`http://www.or.uni-bonn.de/lectures/ss17/kgm_uebung_ss17.html`
Abgabe: Donnerstag, 29.6.2017, vor der Vorlesung.