

Kombinatorik, Graphen, Matroide

7. Übung

1. Es sei G ein einfacher planarer Graph mit fester Einbettung, und jede Kante sei entweder rot oder blau gefärbt. Für jeden Knoten v seien $e_1(v), \dots, e_{|\delta_G(v)|}(v)$ die zu v inzidenten Kanten in der zyklischen Reihenfolge ihrer Einbettung. Die Zahl der *Farbwechsel* an einem Knoten v sei definiert also die Zahl der Indizes $i \in \{1, \dots, |\delta_G(v)|\}$, für die e_i eine andere Farbe als e_{i+1} hat (wobei wir $e_{|\delta_G(v)|+1}(v) = e_1(v)$ setzen). Zeigen Sie, dass es mindestens einen Knoten mit höchstens zwei Farbwechseln geben muss. (4 Punkte)
2. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:
 - (a) Für jede unendliche Folge G_1, G_2, \dots von Graphen gibt es zwei Indizes $i < j$, so dass G_i ein Minor von G_j ist.
 - (b) Sei \mathcal{G} eine Klasse von Graphen, die bezüglich Minorenbildung abgeschlossen ist, d.h. für jedes $G \in \mathcal{G}$ ist auch jeder Minor von G in \mathcal{G} enthalten. Dann gibt es eine endliche Menge \mathcal{X} von Graphen, so dass \mathcal{G} aus genau den Graphen besteht, die kein Element von \mathcal{X} als Minor enthalten. (4 Punkte)
3. Gegeben seien ein Graph G und eine Kante $e = \{v, w\} \in E(G)$. H ist eine Unterteilung von G durch e , wenn $V(H) = V(G) \dot{\cup} \{x\}$ und $E(H) = (E(G) \setminus \{e\}) \cup \{\{v, x\}, \{x, w\}\}$. Ein Graph, der aus G durch sukzessives Unterteilen von Kanten entsteht, heißt Unterteilung von G .
 - (a) Wenn H eine Unterteilung von G enthält, dann ist G ein Minor von H . Umgekehrt ist dies nicht der Fall.
 - (b) Wenn ein Graph den $K_{3,3}$ oder den K_5 als Minor enthält, dann enthält er auch eine Unterteilung vom $K_{3,3}$ oder K_5 .
 - (c) Man folgere, dass ein Graph genau dann planar ist, wenn kein Subgraph eine Unterteilung vom $K_{3,3}$ oder K_5 ist. (2+3+1 Punkte)
4. Sei G ein planarer zweifach zusammenhängender Graph. Zeigen sie, dass das planare Dual von G genau dann bipartit ist, wenn jeder Knoten in G geraden Grad hat. (2 Punkte)

Homepage der Übung:

http://www.or.uni-bonn.de/lectures/ss17/kgm_uebung_ss17.html

Abgabe: Dienstag, 13.6.2017, vor der Vorlesung.