Sommersemester 2016
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
12. Übung

Hinweise zu den Lösungshinweisen: Die Lösungshinweise sind nicht notwendigerweise vollständige Lösungen, sondern sollen nur die wichtigsten Argumente angeben.

1. Zeigen Sie, dass Unabhängigkeitsorakel und Basis-Obermengen-Orakel für Matroide polynomiell äquivalent sind. (4 Punkte)

   Lösungshinweise: Sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid.

   Es sei ein Unabhängigkeitsorakel für $(E, \mathcal{F})$ gegeben. Von einer Menge $F \subseteq E$ soll nun entschieden werden, ob sie eine Basis enthält. Dazu gibt man allen Elementen in F Gewicht 1 und allen anderen Gewicht 0. Dann lässt man den Best-In-Greedy-Algorithmus (mit Gewichtsmaximierung als Ziel) laufen. Wenn F eine Basis enthält, wird der Algorithmus eine solche zurückgeben. Andernfalls wird er auch Elemente auswählen, die nicht in F enthalten sind.

   Sei umgekehrt ein Basis-Obermengen-Orakel gegeben. Zu einer Menge $F \subseteq E$ soll nun entschieden werden, ob sie in $\mathcal{F}$ liegt. Dazu gibt man allen Elementen in F Gewicht 1 und allen anderen Gewicht 0. Dann lässt man den Worst-Out-Greedy-Algorithmus (mit Gewichtsmaximierung als Ziel) laufen. Genau dann wenn F unabhängig ist, wird der eine Lösung zurückgeben, die alle Elemente von F enthält.

2. Es sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid. Zeigen Sie, dass der Best-In-Greedy jede Bottleneck-Funktion $c(F) = \min\{c(e) \mid e \in F\}$ über den Basen maximiert. (3 Punkte)

   Lösungshinweise: Sei $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ mit $c(e_1) \geq c(e_2) \geq \dots \geq c(e_n)$. Sei G die Ausgabe des Best-In-Greedy, und sei e_j das letzte Element, das der Best-In-Greedy aussucht (jeweils mit dieser Sortierung). Nehmen wir an, dass es eine Lösung gibt, die kein e_k mit $k \geq j$ enthält. Dann enthält $\{e_1, \dots, e_{j-1}\}$ eine Basis B. Es gilt aber $|G| = |B|$ und daher $|\{e_1, \dots, e_{j-1}\} \cap G| < B$. Das ist ein Widerspruch dazu, dass der Best-In-Greedy in $\{e_1, \dots, e_{j-1}\}$ ein Basis gefunden haben muss.

3. Es sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid und $c : E \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit $c(e) \neq c(e')$ und $c(e) \neq 0$ für alle $e, e' \in E$ mit $e \neq e'$. Zeigen Sie, dass dann sowohl das Maximierungsproblem als auch das Minimierungsproblem für $(E, \mathcal{F})$ eine eindeutige Lösung haben. Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass das im allgemeinen nicht der Fall ist, wenn $(E, \mathcal{F})$ nur ein Unabhängigkeitssystem ist. (4 Punkte)

   Lösungshinweise: Bei zwei verschiedenen Lösungen könnte man durch Austausch von zwei Elementen eine Lösung verbesseren (da der Austausch nicht kostenneutral sein kann).

   Gegenbspiel für allgemeine Unabhängigkeitssysteme: TSP-Unabhängigkeitssystem auf dem K_4. Man vergebe Kantenlängen von 1 bis 6. 1 und 2 werden Gewichte von zwei nicht benachbarten Kanten. Die vier restlichen Kanten werden in zwei perfekte Matchings zerlegt. In einem Matching erhalten die Kanten Gewicht 3 und 6 in dem anderen 4 und 5. Das führte zu zwei verschiedenen kürzesten Rundreisen mit Gewicht 12.

4. Es sei k eine positive ganze Zahl. Für einen Graphen G sei

$$\mathcal{F}_G = \{F \subseteq E(G) \mid \Delta((V(G), F)) \leq k\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $(E(G), \mathcal{F}_G)$ immer ein Unabhängigkeitssystem ist, aber im allgemeinen kein Matroid.

(b) Betrachten Sie das Problem, zu einem gegebenen Graphen G mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$ eine Menge $F \in \mathcal{F}_G$ zu finden, die $\sum_{e \in F} c(e)$ maximiert. Zeigen Sie, dass der BEST-IN-GREEDY für dieses Optimierungsproblem eine Lösung findet, die höchstens um den Faktor 2 schlechter ist als eine optimale Lösung. (2+3 Punkte)

Lösungshinweise:

(a) Dass $(E(G), \mathcal{F}_G)$ ein Unabhängigkeitssystem ist, ist trivial (in der Klausur aber erläutern!). Um zu sehen, dass $(E(G), \mathcal{F}_G)$ kein Matroid ist, betrachte man z.B. einen Graphen G mit $V(G) = \{v_0, \ldots, v_k\} \dot{\cup} \{w_0, \ldots, w_k\}$ und $E(G) = \{\{v_0, w_0\}\} \cup \{\{v_0, w_i\} \mid i = 1, \ldots, k\} \cup \{\{w_0, v_i\} \mid i = 1, \ldots, k\}$. Dann sind $F_1 = E(G) \setminus \{\{v_0, w_0\}\}$ und $F_2 = E(G) \setminus \{\{v_0, w_k\}, \{w_0, v_k\}\}$ unabhängige Mengen mit $|F_1| > |F_2|$, aber es gibt kein $e \in F_1 \setminus F_2$, für das $F_2 \cup \{e\}$ unabhängig wäre.

(b) Wenn H ein Graph mit Maximalgrad k ist, dann kann das Hinzufügen einer Kante e nur bei höchstens 2 Knoten den Grad auf über k bringen, also enthält $E(H) \cup e$ höchstens zwei Matroidkreise. Nach Satz 13.8 aus Korte, Vygen [2012] ist der Rangquotient von $(E(G), \mathcal{F}_G)$ daher mindestens $\frac{1}{2}$, also erreicht der BEST-IN-GREEDY nach Satz 13.19 aus Korte, Vygen [2012] eine Approximationsgüte von 2.