Sommersemester 2016
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
11. Übung

1. Sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid mit Rangfunktion r, und sei k eine ganze Zahl mit $|E| \geq k > r(E)$. Sei $\mathcal{B}_k = \{X \subseteq E \mid |X| = k \text{ und } r(X) = r(E)\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_k$ die Menge der Basen eines Matroids ist. (4 Punkte)

2. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Für jedes Matroid $(E, \mathcal{F})$ mit Abschlussoperator $\sigma : 2^E \to 2^E$, $X \subseteq E$ und $x \in \sigma(X)$ gilt: $\sigma(X \cup \{x\}) = \sigma(X)$. (4 Punkte)

3. Sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid mit Abschlussoperator $\sigma : 2^E \to 2^E$, und sei $e \in E$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
   (a) e ist in jeder Basis enthalten.
   (b) e ist in keinem Kreis enthalten.
   (c) Wenn $X \subseteq E$ und $e \in \sigma(X)$, dann $e \in X$.
   (d) $r(E \setminus \{e\}) = r(E) - 1$.
   (e) Für jedes $X \in \mathcal{F}$ gilt $(X \cup \{e\}) \in \mathcal{F}$. (5 Punkte)

4. Es sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid, und es seien A und B zwei Teilmengen von E, die jeweils eine Basis enthalten und für die $|A| > |B|$ gilt. Muss es dann auch notwendigerweise ein $x \in A \setminus B$ geben, so dass $A \setminus \{x\}$ eine Basis enthält? Begründen Sie Ihre Antwort. (3 Punkte)

Bemerkung: Die Ergebnisse dieses Zettels gehen nicht mehr in die Entscheidung über die Klausurzulassung ein.

Abgabe: Donnerstag, den 7.7.2016, vor der Vorlesung.