Sommersemester 2016
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
7. Übung

1. Gegeben seien ein Graph G und eine Kante $e = \{v, w\} \in E(G)$. H ist eine Unterteilung von G durch e, wenn $V(H) = V(G)\dot{\cup}\{x\}$ und $E(H) = (E(G)\setminus\{e\}) \cup \{\{v, x\}, \{x, w\}\}$. Ein Graph, der aus G durch sukzessives Unterteilen von Kanten entsteht, heißt Unterteilung von G.

   (a) Wenn H eine Unterteilung von G enthält, dann ist G ein Minor von H. Umgekehrt ist dies nicht der Fall.

   (b) Wenn ein Graph den $K_{3,3}$ oder den K_5 als Minor enthält, dann enthält er auch eine Unterteilung vom $K_{3,3}$ oder K_5.

   (c) Man folgere, dass ein Graph genau dann planar ist, wenn kein Subgraph eine Unterteilung vom $K_{3,3}$ oder K_5 ist. (2+3+1 Punkte)

2. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter einfacher Graph. Der Liniengraph von G ist definiert als Graph $L(G) = (E, F)$, wobei $F = \{\{e, e'\} \subseteq E \mid |e \cap e'| = 1\}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Wenn G planar ist, dann ist auch der Liniengraph von G planar.

   (b) Wenn der Liniengraph von G planar ist, dann ist auch G planar. (2+2 Punkte)

3. Der Graph G sei planar, aber jedes Hinzufügen einer Kante zwischen zwei in G nicht verbundenen Knoten führe zu einem nicht-planaren Graphen. Stimmt es dann, dass für je zwei Knoten u,v, die in G nicht verbunden sind, der Graph $(V(G), E(G) \cup \{\{u, v\}\})$ den K_5 als Minor enthält? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

4. Sei G ein zusammenhängender Graph mit planarer Einbettung Φ. Es sei G^* der planare Dualgraph dazu. Zeigen Sie, dass die Zahl der aufspannenden Bäume für G und G^* gleich ist. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 9.6.2016, vor der Vorlesung.