Sommersemester 2016
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
6. Übung

1. Zeigen Sie, dass es genau fünf Platonische Körper gibt, d.h. dass es (bis auf Isomorphie) genau fünf 3-zusammenhängende reguläre planare Graphen gibt, deren Flächen alle von Kreisen derselben Länge berandet werden. (4 Punkte)

2. Betrachten Sie folgendes Spiel: Gegeben sei ein leerer Graph G mit n_0 Knoten, der planar in die Ebene eingebettet ist. Spieler A und Spieler B führen nun abwechselnd Züge der folgenden Art durch: In jedem Zug werden Knoten u,v aus G gewählt (wobei $u = v$ möglich ist) und neuer Knoten w sowie die Kanten $\{u, w\}$ und $\{v, w\}$ in G eingefügt (falls $u = v$ entstehen also parallele Kanten). Der Knoten w und die beiden neuen Kanten sind dabei so in die Ebene einzubetten, dass sich mit den schon eingebetteten Knoten und Kanten eine planare Einbettung des erweiterten Graphen ergibt. Durch einen Zug darf kein Knoten entstehen, der mit mehr als drei Kanten verbunden ist. Spieler A beginnt, und es gewinnt der Spieler, der den letzten Zug ausführt. Kann dieses Spiel beliebig lang fortgesetzt werden? Für welchen Spieler gibt es für $n_0 = 2$ eine Gewinnstrategie? (3 Punkte)

3. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (a) Für jede unendliche Folge $G_1, G_2 \ldots$ von Graphen gibt es zwei Indizes $i < j$, so dass G_i ein Minor von G_j ist.

   (b) Sei $\mathcal{G}$ eine Klasse von Graphen, die bezüglich Minorenbildung abgeschlossen ist, d.h. für jedes $G \in \mathcal{G}$ ist auch jeder Minor von G in $\mathcal{G}$ enthalten. Dann gibt es eine endliche Menge $\mathcal{X}$ von Graphen, so dass $\mathcal{G}$ aus genau den Graphen besteht, die kein Element von $\mathcal{X}$ als Minor enthalten. (5 Punkte)

4. Sei G ein planarer zweifach zusammenhängender Graph, in dem jeder Knoten geraden Grad hat. Sei Φ eine Einbettung von G. Zeigen Sie, dass man dann die Gebiete von Φ so mit zwei Farben färben kann, dass keine zwei benachbarten Gebiete dieselbe Farbe haben. Dabei heißen zwei Gebiete benachbart, wenn es eine Kante gibt, die auf dem Rand beider Gebiete liegt. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 2.6.2016, vor der Vorlesung.