Sommersemester 2016
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
4. Übung

1. Zeigen Sie, dass man jede natürliche Zahl als Summe von paarweise verschiedenen Fibonacci-Zahlen schreiben kann. (2 Punkte)

2. Für Konstanten $b, c, d \in \mathbb{R}$ sei die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ gegeben durch $a_n = ba_{n-1} + cd^{n-1}$ für $n \geq 1$ und $a_0 = 0$. Finden Sie eine geschlossene Formel zur Berechnung der Folgeglieder. (4 Punkte)

3. Bestimmen Sie die Zahl a_n der Wörter der Länge n über dem Alphabet $\{A, B, C, 1, 2, 3, 4\}$, in denen keine zwei Buchstaben direkt hintereinander stehen (d.h. zeigen Sie, wie a_n direkt aus n berechnet werden kann). (5 Punkte)
   Hinweis: Betrachten Sie die erzeugende Funktion $A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

4. Es sei $C_0 = 0$, und für $n > 0$ sei C_n die Zahl der Möglichkeiten, ein Produkt $a_1a_2 \ldots a_n$ zu klammern. Beispielsweise ist $C_4 = 5$, da es genau die 5 Möglichkeiten $((a_1a_2)a_3)a_4$, $(a_1a_2)(a_3a_4)$, $a_1((a_2a_3)a_4)$, $a_1(a_2(a_3a_4))$, $(a_1(a_2a_3))a_4$ gibt.

   (a) Zeigen Sie, dass für $n > 1$ gilt: $C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k}$.

   (b) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion $G(z) = \sum_{n\geq 0} C_n z^n$.
   Hinweis: Betrachten Sie $G(z)^2$. (2+3 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 12.5.2016, vor der Vorlesung.