

## Kombinatorik, Graphen, Matroide

### 2. Übung

1. Für  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  sei  $\Lambda(n)$  die Zahl der ungerichteten Graphen auf der Knotenmenge  $\{1, \dots, n\}$ , in denen kein Knoten Grad 0 hat. Geben Sie eine Formel zur Berechnung von  $\Lambda(n)$  an. (3 Punkte)
2. Zeigen Sie, dass für  $k, n \in \mathbb{N}$  gilt:  $S_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$ . (3 Punkte)
3. Zeigen Sie, dass ein ungerichteter Graph  $G$  mit  $n$  Knoten, der keinen Kreis der Länge 4 als Teilgraph enthält, höchstens  $\lfloor \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n-3}) \rfloor$  Kanten hat. (4 Punkte)  
Hinweis: Betrachten Sie auf den Mengen  $S = V(G)$  und  $T = \{\{v, w\} \subseteq V(G) \mid v \neq w\}$  die Relation  $R \subseteq S \times T$ , die gegeben ist durch
$$(u, \{v, w\}) \in R \Leftrightarrow \{u, v\} \in E(G) \text{ und } \{u, w\} \in E(G).$$
4. Es sei  $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \{1, \dots, 2n-2\}$ . Zeigen Sie, dass es Zahlen  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $i \neq j$  gibt, so dass  $a_i$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $a_j$  ist. (3 Punkte)
5. Ein Holzfäller fällt über einen Zeitraum von 90 Tagen jeden Tag wenigstens einen Baum, aber nie mehr als fünf Bäume an drei aufeinanderfolgenden Tagen. Man zeige, dass es dann für jedes  $k \in \{1, \dots, 29\}$  einen Zeitraum von aufeinanderfolgenden Tagen gibt, an dem der Holzfäller genau  $k$  Bäume fällt. (3 Punkte)