Sommersemester 2015
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
Probeklausur

1. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Zu jeder natürlichen Zahl k gibt es eine natürliche Zahl n_k, so dass für alle $n \geq n_k$ gilt: Für jede Abbildung $f : E(K_n) \to \{1, 2, 3\}$ gibt es eine Menge $X \subseteq V(K_n)$ mit $|X| \geq k$, so dass $f(e) = f(e')$ für alle Kanten e und e' in $E(K_n[X])$ gilt. (6 Punkte)

2. Es sei G ein einfacher ungerichteter Graph mit Farblisten C_v (für alle Knoten $v \in V(G)$) mit jeweils genau $\Delta(G)$ Elementen. Für je zwei Knoten $v, w \in V(G)$ gelte $C_v \cap C_w \neq \emptyset$. Außerdem gebe es zwei Knoten x und y, die nicht benachbart sind, aber einen gemeinsamen Nachbarn haben, und für die $G - \{x, y\}$ zusammenhängend sei. Zeigen Sie, dass es dann eine zulässige Listenfärbung $c : V(G) \to \bigcup_{v \in V(G)} C_v$ gibt. (5 Punkte)

3. Sei G ein einfacher ungerichteter planarer Graph, in dem jeder induzierte Subgraph einen Knoten vom Grad ≤ 4 enthält. Zeigen Sie, ohne den Vierfarbensatz zu benutzen, dass dann $\chi(G) \leq 4$ gilt. (5 Punkte)

4. Es sei G ein einfacher ungerichteter Graph mit maximalem Knotengrad $\Delta(G)$. Die Menge $X := \{v \in V(G) \mid |\delta(v)| = \Delta(G)\}$ sei unabhängig, d.h. keine zwei Elemente von X seien in G durch eine Kante verbunden. Zeigen Sie, dass es dann eine Kantenfärbung von G mit $\Delta(G)$ Farben gibt. (8 Punkte)
   Hinweis: Modifizieren Sie den Beweis des Satzes von Vizing auf geeignete Weise.

5. Es seien $(E, \mathcal{F}_1)$ und $(E, \mathcal{F}_2)$ zwei verschiedene Matroide, und es sei $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. Außerdem sei r_i für $i \in \{1, 2, 3\}$ die Rangfunktion von $(E, \mathcal{F}_i)$. Welche der folgenden Aussagen gelten dann in jedem Fall?

   (a) Für alle $X \subseteq E$ und $x, y \in E$ gilt: Wenn $r_3(X \cup \{x\}) = r_3(X \cup \{y\}) = r_3(X)$ gilt, so gilt auch $r_3(X \cup \{x, y\}) = r_3(X)$.
   (b) Es gilt $r_3(E) < \max\{r_1(E), r_2(E)\}$.
   (c) Es gibt ein $X \subseteq E$, für das $r_3(X) < \max\{r_1(X), r_2(X)\}$ gilt.
   (d) Für jedes $X \in \mathcal{F}_3$ und $x \in E \setminus X$ gibt es $y, z \in X$, so dass $X \cup \{x\} \setminus \{y, z\} \in \mathcal{F}_3$.

   Wenn eine Aussage stimmt, beweisen Sie sie kurz. Wenn sie falsch ist, widerlegen Sie sie durch ein Gegenbeispiel. (2+2+2+2 Punkte)

6. Es sei E eine endliche Menge, und es seien $S_1, \ldots, S_r \subseteq E$ und $k_1 \ldots, k_r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Außerdem sei $\mathcal{F} = \{F \subseteq E \mid |S_i \cap F| \leq k_i \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, r\}\}$

   (a) Zeigen Sie, dass $(E, \mathcal{F})$ ein Unabhängigkeitssystem, aber nicht notwendigerweise ein Matroid ist.

(b) Betrachten Sie für dieses Unabhängigkeitssystem und eine gegebene Gewichtsfunktion $c : E \to \mathbb{N}$ das Maximierungsproblem $(E, \mathcal{F}, c)$. Beweisen oder widerlegen Sie jeweils die folgenden Aussagen:

   (i) Der Best-In-Greedy-Algorithmus liefert stets eine Lösung, deren Wert höchstens um den Faktor r vom Wert einer Optimallösung abweicht.

   (ii) Der Best-In-Greedy-Algorithmus liefert stets eine Lösung, deren Wert höchstens um den Faktor $\max\{k_1, \ldots, k_r\}$ vom Wert einer Optimallösung abweicht.

(2+6 Punkte)

7. Betrachten Sie folgendes Problem: Zu einem gegebenen einfachen ungerichteten zusammenhängenden Graphen G mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{N}$ soll eine gewichtsmaximale Kantenmenge $F \subseteq E(G)$ gefunden werden, so dass $(V(G), E(G) \setminus F)$ zusammenhängend ist und $(V(G), F)$ kreisfrei. Zeigen Sie, dass es für dieses Problem einen Algorithmus gibt, dessen Laufzeit polynomiell in der Eingabegröße ist. (6 Punkte)