

## Kombinatorik, Graphen, Matroide

### 11. Übung

1. Sei  $(E, \mathcal{F})$  ein Matroid mit Abschlussoperator  $\sigma : 2^E \rightarrow 2^E$ , und sei  $e \in E$ . Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
  - (a)  $e$  ist in jeder Basis enthalten.
  - (b)  $e$  ist in keinem Kreis enthalten.
  - (c) Wenn  $X \subseteq E$  und  $e \in \sigma(X)$ , dann  $e \in X$ .
  - (d)  $r(E \setminus \{e\}) = r(E) - 1$ .
  - (e) Für jedes  $X \in \mathcal{F}$  gilt  $(X \cup \{e\}) \in \mathcal{F}$ . (5 Punkte)
2. Es sei  $(E, \mathcal{F})$  ein Matroid, und es seien  $A$  und  $B$  zwei Teilmengen von  $E$ , die jeweils eine Basis enthalten und für die  $|A| > |B|$  gilt. Muss es dann auch notwendigerweise ein  $x \in A \setminus B$  geben, so dass  $A \setminus \{x\}$  eine Basis enthält? Begründen Sie Ihre Antwort. (3 Punkte)
3. Es sei  $(E, \mathcal{F})$  ein Matroid. Es seien  $X$  und  $Y$  zwei disjunkte Teilmengen von  $E$ , so dass  $X$  in  $(E, \mathcal{F})$  unabhängig ist und  $Y$  im dualen Matroid  $(E, \mathcal{F}^*)$  unabhängig ist. Zeigen Sie, dass es dann eine Basis  $B$  von  $(E, \mathcal{F})$  mit  $X \subseteq B$  und eine Basis  $B^*$  von  $(E, \mathcal{F}^*)$  mit  $Y \subseteq B^*$  gibt, so dass  $B$  und  $B^*$  disjunkt sind. Gilt diese Aussage auch noch in jedem Fall, wenn  $(E, \mathcal{F})$  nur ein Unabhängigkeitssystem ist? (3 Punkte)
4. Es sei  $k$  eine positive ganze Zahl. Ein  $k$ -Hypergraph ist ein Paar  $H = (V(H), E(H))$  mit  $E(H) \subseteq \{e \mid e \subseteq V(H), |e| = k\}$ . Die 2-Hypergraphen sind also gerade die Graphen. Zu einem  $k$ -Hypergraph  $H = (V(H), E(H))$  sei

$$\mathcal{F}_H = \{F \subseteq E(H) \mid \forall e, e' \in F : |e \cap e'| \leq 1\}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $(E(H), \mathcal{F}_H)$  immer ein Unabhängigkeitssystem ist, aber im allgemeinen kein Matroid.
- (b) Betrachten Sie das Problem, zu einem gegebenen  $k$ -Hypergraphen  $H$  mit Kantengewichten  $c : E(H) \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine Menge  $F \in \mathcal{F}_H$  zu finden, die  $\sum_{e \in F} c(e)$  maximiert. Welche Approximationsgüte erreicht der BEST-IN-GREEDY für dieses Problem? Zeigen Sie durch Beispiele, dass die von Ihnen bewiesene Approximationsgüte bestmöglich ist. (2+3 Punkte)