Kombinatorik, Graphen, Matroide
10. Übung

1. Sei G ein Graph, und sei $\mathcal{F}$ die Familie aller Mengen $X \subseteq V(G)$, für die ein kardinalitätsmaximales Matching existiert, das keinen Knoten in X überdeckt. Zeigen Sie, dass $(V(G), \mathcal{F})$ ein Matroid ist. (3 Punkte)

2. Sei E eine endliche Menge und $\mathcal{B} \subseteq 2^E$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ genau dann die Menge der Basen eines Matroids ist, wenn die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:

   (B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$

   (B2)' Für $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $x \in B_1$ gibt es ein Element $y \in B_2$, so dass $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$.

   (B3) Für $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ gilt $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow B_1 = B_2$. (4 Punkte)

3. Sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid mit Rangfunktion r.

   (a) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:
   $(E, \mathcal{F})$ ist genau dann uniform, wenn es keine Kreise mit weniger als $r(E) + 1$ Elementen enthält.

   (b) Sei k eine positive ganze Zahl, und sei $r_k : 2^E \to \mathbb{Z}_+$ definiert durch $r_k(X) = \min\{k, r(X)\}$. Zeigen Sie, dass r_k die Rangfunktion eines Matroids ist. (2+3 Punkte)

4. Es sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid mit Abschlussoperator $\sigma : 2^E \to 2^E$. Es seien $X, Y \subseteq E$ mit $\sigma(X) = X$ und $\sigma(Y) = Y$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Aus diesen Voraussetzungen folgt $\sigma(X \cap Y) = X \cap Y$.

   (b) Aus diesen Voraussetzungen folgt $\sigma(X \cup Y) = X \cup Y$. (2+2 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 30.6.2015, vor der Vorlesung.