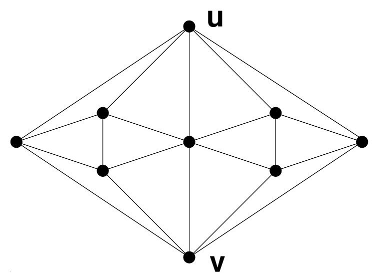
Kombinatorik, Graphen, Matroide
9. Übung

1. Betrachten Sie den folgenden Graph:



   (a) Geben Sie Farblisten für die Knoten an, die für u und v aus je einem Element und für alle anderen Knoten aus je vier Elementen bestehen, so daß es für diese Listen keine zulässige Listenfärbung gibt.

   (b) Folgern Sie aus (a), daß es planare Graphen gibt, deren listenchromatische Zahl größer als vier ist. (3+2 Punkte)

2. Für einen ungerichteten Graph G und $t \in \mathbb{N}$ sei $p_G(t)$ die Zahl der verschiedenen zulässigen Knotenfärbungen von G mit den Farben $\{1, \ldots, t\}$. Dabei betrachten wir zwei Knotenfärbungen als verschieden, wenn es mindestens einen Knoten gibt, dem sie unterschiedliche Farben zuordnen. Zeigen Sie, daß für jeden Graphen G die Abbildung $p_G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ein Polynom vom Grad $|V(G)|$ ist. Wie lautet der Koeffizient von $t^{|V(G)|}$? (4 Punkte)

   Hinweis: Betrachten Sie zunächst vollständige Graphen. Bei Graphen, in dem es zwei Knoten v und w gibt, die nicht durch eine Kante verbunden sind, können Sie sich dann überlegen, was passiert, wenn Sie v und w durch eine zusätzliche Kante verbinden oder $\{v, w\}$ kontrahieren.

3. Für einen Graphen G sei $\sigma(G)$ die Zahl der Möglichkeiten seine Kanten so zu orientieren, daß kein gerichteter Kreis entsteht. Zeigen Sie, daß dann gilt: $\sigma(G) = |p_G(-1)|$, wobei p_G das Polynom aus Aufgabe 2 sei.

   Hinweis: Induktion in der Kantenzahl. Überlegen Sie sich dazu eine geeignete Rekursionsformel zur Berechnung von $\sigma(G)$. (4 Punkte)

4. Es sei $\mathcal{S}$ eine endliche Familie von endlichen (nicht notwendigerweise paarweise verschiedenen) Mengen. Eine Menge T ist eine *Transversale* von $\mathcal{S}$, falls eine Bijektion $\Phi : T \to \mathcal{S}$ existiert mit $t \in \Phi(t)$ für alle $t \in T$. Nehmen Sie an, daß $\mathcal{S}$ mindestens eine Transversale besitzt, und zeigen Sie, daß die Menge aller Transversalen von $\mathcal{S}$ die Menge der Basen eines Matroiden ist (des sogenannten *transversalen Matroids*). (3 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 23.6.2015, vor der Vorlesung.