

Kombinatorik, Graphen, Matroide

8. Übung

- (a) Bei welchen zusammenhängenden Graphen ist die chromatische Zahl größer als die kantenchromatische Zahl?
(b) Sei G ein Graph mit n Knoten. Zeigen Sie, daß $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$ gilt (wobei \bar{G} der Komplementärgraph von G sei, also der Graph mit derselben Knotenmenge wie G , in dem aber zwei Knoten genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn sie es in G nicht sind). (2+3 Punkte)

- Für einen einfachen Graphen G sei $t(G)$ die kleinste Zahl, für die es planare Graphen $G_1, \dots, G_{t(G)}$ gibt, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:
 - $V(G_i) = V(G)$ ($i \in \{1, \dots, t(G)\}$),
 - $E(G) = \bigcup_{i=1}^{t(G)} E(G_i)$.

Ein Graph G ist also genau dann planar, wenn $t(G) = 1$ gilt.

- Zeigen Sie, daß $t(K_n) \geq \lfloor \frac{n+7}{6} \rfloor$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt.
- Zeigen Sie, daß es Graphen G mit $t(G) = 2$ und $\chi(G) = 8$ gibt.
- Geben Sie eine möglichst gute obere Schranke für den folgenden Wert an:

$$\max\{\chi(G) \mid t(G) = 2\}.$$

Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Schranke. (2+2+2 Punkte)

- Betrachten Sie den Greedy-Knotenfärbungsalgorithmus, in dem die Knoten in irgendeiner Reihenfolge durchlaufen werden und jeder Knoten die kleinste noch nicht an seinen schon gefärbten Nachbarn benutzte Farbe bekommt. Zeigen Sie, daß es für jedes $n \geq 2$ einen Graphen G mit $|V(G)| = 2n$ und $\chi(G) = 2$ gibt, so daß, wenn die Knoten in einer geeigneten Reihenfolge durchlaufen werden, der Greedy-Algorithmus n Farben benötigt. Zeigen Sie umgekehrt, daß es für jeden Graphen G eine Sortierung der Knoten gibt, so daß, wenn der Greedy-Algorithmus die Knoten in dieser Reihenfolge betrachtet, er nur $\chi(G)$ Farben benötigt. (2 Punkte)
- Sei G ein regulärer Graph mit ungerader Knotenzahl, und H entstehe aus G durch Löschen von höchstens $\frac{\Delta(G)}{2} - 1$ Kanten (insbesondere könnte $G = H$ gelten). Zeigen Sie, daß dann $\chi'(H) = \Delta(H) + 1$ gilt. (3 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 16.6.2015, vor der Vorlesung.