Sommersemester 2015
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
4. Übung

1. Bestimmen Sie die Zusammenhangskoeffizienten der Basen $\{x^{\overline{n}}\}$ und $\{x^{\underline{n}}\}$, d.h. finden Sie Zahlen $a_{n,k}$ und $b_{n,k}$ (für $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), so daß für alle $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt:
$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \cdot x^{\underline{k}} \quad \text{und}$$
$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} \cdot x^{\overline{k}}$$
(5 Punkte)
Hinweis: Benutzen Sie, daß für komplexes x und y und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Vandermonde-Identität gilt, also
$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} \binom{y}{n-k}.$$

2. Wie viele Möglichkeiten gibt es, n Ehepaare so auf $2n$ Stühle an einem runden Tisch zu verteilen, daß keine zwei Ehepartner nebeneinandersitzen? (3 Punkte)

3. Verallgemeinern Sie das Inklusions-Exklusions-Prinzip. Es seien $E_1, \ldots, E_m$ Eigenschaften von Elementen eine n-elementigen Menge S. Zeigen Sie, daß die Anzahl der Elemente, welche genau t Eigenschaften haben, durch
$$\sum_{j=0}^{m-t} \left[(-1)^j \binom{t+j}{t} \sum_{i_1 < \cdots < i_{t+j}} N(E_{i_1} \ldots E_{i_{t+j}}) \right]$$
gegeben ist, wobei $N(E_{i_1} \ldots E_{i_{t+j}})$ die Zahl der Elemente sei, welche die Eigenschaften $E_{i_1} \ldots E_{i_{t+j}}$ besitzen. (4 Punkte)

4. Berechnen Sie durch Betrachtung geeigneter erzeugender Funktionen die folgende Summe:
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2.$$
Im Ergebnis können Binomialkoeffizienten vorkommen, aber davon abgesehen muß eine Auswertung durch eine konstante Anzahl von Rechenoperationen möglich sein. (4 Punkte)
Hinweis: Betrachten Sie $(1 - x^2)^n$.

Abgabe: Dienstag, den 12.5.2015, vor der Vorlesung.