Sommersemester 2015
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
1. Übung

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es, k Zahlen aus der Menge $\{1, \ldots, n\}$ auszuwählen, ohne daß man zwei aufeinanderfolgende Zahlen aussucht? (3 Punkte)

2. Es sei $B_0 = 1$ und $B_n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie:
$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$
(3 Punkte)

3. Es sei $\tilde{B}_0 = 1$ und $\tilde{B}_n = \sum_{k=0}^{n} k! S_{n,k}$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Finden Sie (analog zu Aufgabe 2) eine rekursive Formel, mit der sich für $n \in \mathbb{N}$ der Wert $\tilde{B}_{n+1}$ aus den Werten $\tilde{B}_0, \ldots, \tilde{B}_n$ berechnen läßt. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Formel. (4 Punkte)

4. Gegeben sei eine Permutation $a_1 a_2 \ldots a_n$ von $\{1, \ldots, n\}$. Eine *Inversion* ist ein Paar a_i, a_j mit $i < j$ aber $a_i > a_j$. Zum Beispiel hat 1 4 3 5 2 die Inversionen 4,3; 4,2: 3,2; 5,2. Es sei $I_{n,k}$ die Zahl der Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$ mit genau k Inversionen. Zeigen Sie:
   (a) $I_{n,0} = 1$.
   (b) $I_{n,k} = I_{n,\binom{n}{2}-k}$ für $k = 0, \ldots, \binom{n}{2}$.
   (c) $I_{n,k} = I_{n-1,k} + I_{n,k-1}$ für $k < n$. Gilt dies auch für $k = n$?
   (d) $\sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} (-1)^k I_{n,k} = 0$ für $n \geq 2$. (1+1+2+2 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 21.4.2015, vor der Vorlesung.