Sommersemester 2014
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
10. Übung

1. Sei G ein Graph, und sei $\mathcal{F}$ die Familie aller Mengen $X \subseteq V(G)$, für die ein kardinalitätsmaximales Matching existiert, das keinen Knoten in X überdeckt. Zeigen Sie, daß $(V(G), \mathcal{F})$ ein Matroid ist. (4 Punkte)

2. Es sei $\mathcal{S}$ eine endliche Familie von endlichen (nicht notwendigerweise paarweise verschiedenen) Mengen. Eine Menge T ist eine *Transversale* von $\mathcal{S}$, falls eine Bijektion $\Phi : T \to \mathcal{S}$ existiert mit $t \in \Phi(t)$ für alle $t \in T$. Nehmen Sie an, daß $\mathcal{S}$ mindestens eine Transversale besitzt, und zeigen Sie, daß die Menge aller Transversalen von $\mathcal{S}$ die Menge der Basen eines Matroiden ist (des sogenannten *transversalen Matroids*). (4 Punkte)

3. Beweisen oder widerlegen Sei die folgenden Aussagen:

   (a) Jedes uniforme Matroid ist ein transversales Matroid

   (b) Jedes transversale Matroid ist ein graphisches Matroid (1+2 Punkte)

4. Sei E eine endliche Menge und $\mathcal{B} \subseteq 2^E$. Zeigen Sie, daß $\mathcal{B}$ genau dann die Menge der Basen eines Matroids ist, wenn die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:

   (B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$

   (B2)' Für $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $x \in B_1$ gibt es ein Element $y \in B_2$, so daß $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$.

   (B3) Für $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ gilt $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow B_1 = B_2$. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 26.6.2014, vor der Vorlesung.