Sommersemester 2014
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
8. Übung

1. Für einen einfachen Graphen G sei $t(G)$ die kleinste Zahl, für die es planare Graphen $G_1, \ldots, G_{t(G)}$ gibt, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

   - $V(G_i) = V(G)$ $(i \in \{1, \ldots, t(G)\})$,
   - $E(G) = \bigcup_{i=1}^{t(G)} E(G_i)$.

   Ein Graph G ist also genau dann planar, wenn $t(G) = 1$ gilt.

   (a) Zeigen Sie, daß $t(K_n) \geq \lfloor \frac{n+7}{6} \rfloor$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt.

   (b) Zeigen Sie, daß es Graphen G mit $t(G) = 2$ und $\chi(G) = 8$ gibt.

   (c) Geben Sie eine möglichst gute obere Schranke für den folgenden Wert an:

   $$\max\{\chi(G) \mid t(G) = 2\}.$$

   Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Schranke. (2+2+2 Punkte)

2. Betrachten Sie den Greedy-Knotenfärbungsalgorithmus, in dem die Knoten in irgendeiner Reihenfolge durchlaufen werden und jeder Knoten die kleinste noch nicht an seinen schon gefärbten Nachbarn benutzte Farbe bekommt. Zeigen Sie, daß es für jedes n einen Graphen G mit $|V(G)| = 2n$ und $\chi(G) = 2$ gibt, so daß, wenn die Knoten in einer geeigneten Reihenfolge durchlaufen werden, der Greedy-Algorithmus n Farben benötigt. Zeigen Sie umgekehrt, daß es für jeden Graphen G eine Sortierung der Knoten gibt, so daß, wenn der Greedy-Algorithmus die Knoten in dieser Reihenfolge betrachtet, er nur $\chi(G)$ Farben benötigt. (2 Punkte)

3. Sei G ein ungerichter, nicht vollständiger Graph. Zeigen Sie, daß es dann eine Partition $V(G) = V_1 \dot{\cup} V_2$ gibt, so daß $\chi(G[V_1]) + \chi(G[V_2]) > \chi(G)$ gilt. (4 Punkte)

4. Zeigen Sie, daß es in jedem Graphen G einen Weg mit mindestens $\chi(G) - 1$ Kanten geben muß. (3 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 5.6.2014, vor der Vorlesung.