

## Kombinatorik, Graphen, Matroide

### 7. Übung

1. Gegeben seien ein Graph  $G$  und eine Kante  $e = \{v, w\} \in E(G)$ .  $H$  ist eine Unterteilung von  $G$  durch  $e$ , wenn  $V(H) = V(G) \dot{\cup} \{x\}$  und  $E(H) = (E(G) \setminus \{e\}) \cup \{\{v, x\}, \{x, w\}\}$ . Ein Graph, der aus  $G$  durch sukzessives Unterteilen von Kanten entsteht, heißt Unterteilung von  $G$ .
  - (a) Wenn  $H$  eine Unterteilung von  $G$  enthält, dann ist  $G$  ein Minor von  $H$ . Umgekehrt ist dies nicht der Fall.
  - (b) Wenn ein Graph den  $K_{3,3}$  oder den  $K_5$  als Minor enthält, dann enthält er auch eine Unterteilung vom  $K_{3,3}$  oder  $K_5$ .
  - (c) Man folgere, daß ein Graph genau dann planar ist, wenn kein Subgraph eine Unterteilung vom  $K_{3,3}$  oder  $K_5$  ist. (4 Punkte)
  
2. Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter einfacher Graph. Der Liniengraph von  $G$  ist definiert als Graph  $L(G) = (E, F)$ , wobei  $F = \{\{e, e'\} \subseteq E \mid |e \cap e'| = 1\}$ . Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:
  - (a) Wenn  $G$  planar ist, dann ist auch der Liniengraph von  $G$  planar.
  - (b) Wenn der Liniengraph von  $G$  planar ist, dann ist auch  $G$  planar. (4 Punkte)
  
3. Ein einfacher planarer Graph heiße *kreisplanar*, wenn er so eingebettet werden kann, daß es eine Fläche gibt, die zu jedem Knoten inzident ist (d.h. jeder Knoten muß auf dem Rand der Fläche liegen). Zeigen Sie, daß ein einfacher Graph genau dann kreisplanar ist, wenn er weder den  $K_{2,3}$  noch den  $K_4$  als Minor enthält. (4 Punkte)
  
4. Zeigen Sie, daß die beiden folgenden Aussagen quivalent sind:
  - (a) Für jede unendliche Folge  $G_1, G_2, \dots$  von Graphen gibt es zwei Indizes  $i < j$ , so daß  $G_i$  ein Minor von  $G_j$  ist.
  - (b) Sei  $\mathcal{G}$  eine Klasse von Graphen, die bezüglich Minorenbildung abgeschlossen ist, d.h. für jedes  $G \in \mathcal{G}$  ist auch jeder Minor von  $G$  in  $\mathcal{G}$  enthalten. Dann gibt es eine endliche Menge  $\mathcal{X}$  von Graphen, so daß  $\mathcal{G}$  aus genau den Graphen besteht, die kein Element von  $\mathcal{X}$  als Minor enthalten. (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 4.6.2013, vor der Vorlesung.

Hinweis der Fachschaft Mathematik: Die Fachschaft Mathematik feiert am 05.06. ihre Matheparty im Carpe Noctem. Der Vorverkauf findet am Mo., 03.06., Di., 04.06., und Mi., 05.06., in der Mensa Poppelsdorf statt.