Sommersemester 2013
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
1. Übung

1. Zeigen Sie durch ein kombinatorisches Argument, daß für alle Zahlen $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\binom{kn}{2} = k\binom{n}{2} + n^2\binom{k}{2}.$$

(4 Punkte)

2. Für welche $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist $\sum_{k=1}^{n} k!$

   (a) eine Primzahl?

   (b) eine Quadratzahl?

   Begründen Sie ihre Antworten. (4 Punkte)

3. An einem Fußballturnier nehmen n Mannschaften teil. Jede Mannschaft spielt gegen jede andere. Der Sieger eines Spiels erhält 2 Punkte, der Verlierer 0. Bei einem Unentschieden bekommen beide Mannschaften je einen Punkt. In der Abschlußtabelle werden die Mannschaften absteigend nach der Zahl der Punkte sortiert. Bei Punktgleichheit entscheidet die Differenz der erzielten Tore und der Gegentore. Ist auch diese Differenz gleich, entscheidet das Los. Sei nun $k \in \{1, \dots, n\}$. Wie viele Punkte hat die auf Platz k liegende Mannschaft mindestens? Wie ändert sich das Ergebnis, wenn man zur Dreipunkte-Regel übergeht, wenn also der Sieger einer Partie 3 Punkte erhält? (4 Punkte)

4. Es seien k paarweise disjunkte Mengen $S_1, \dots, S_k$ gegeben. Außerdem sei $a_i = |S_i|$ für $i = 1, \dots, k$. Zeigen Sie:

$$\left| \left\{ X \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} S_i : |X \cap S_i| \le 1 \text{ für alle } i \in \{1, \dots, k\} \right\} \right| = \prod_{i=1}^{k} (a_i + 1).$$

   Folgern Sie daraus, daß, wenn eine Zahl n die Primfaktorzerlegung $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots$ hat, n genau $t(n) = \prod_i (a_i + 1)$ Teiler hat. Wie kann man an $t(n)$ leicht überprüfen, ob n eine Quadratzahl ist? (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 16.4.2013, **vor** der Vorlesung.