Sommersemester 2012 | Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Prof. Dr. B. Korte | Universität Bonn
Dr. U. Brenner

Kombinatorik, Graphen, Matroide
12. Übung

1. Es sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid. Es seien X und Y zwei disjunkte Teilmengen von E, so daß X in $(E, \mathcal{F})$ unabhängig ist und Y im dualen Matroid $(E, \mathcal{F}^*)$ unabhängig ist. Zeigen Sie, daß es dann eine Basis B von $(E, \mathcal{F})$ mit $X \subseteq B$ und eine Basis B^* von $(E, \mathcal{F}^*)$ mit $Y \subseteq B^*$ gibt, so daß B und B^* disjunkt sind. Gilt diese Aussage auch noch in jedem Fall, wenn $(E, \mathcal{F})$ nur ein Unabhängigkeitssystem ist? (4 Punkte)

2. Es sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid und $c : E \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit $c(e) \neq c(e')$ und $c(e) \neq 0$ für alle $e, e' \in E$ mit $e \neq e'$. Zeigen Sie, daß dann sowohl das Maximierungsproblem als auch das Minimierungsproblem für $(E, \mathcal{F})$ eine eindeutige Lösung haben. Zeigen Sie durch ein Beispiel, daß das im allgemeinen nicht der Fall ist, wenn $(E, \mathcal{F})$ nur ein Unabhängigkeitssystem ist. (4 Punkte)

3. Sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid mit Abschlußoperator $\sigma : 2^E \to 2^E$. Sei $X \subseteq E$. Zeigen Sie, daß dann gilt:

   (a) X ist genau dann ein Kreis, wenn X eine inklusionsweise minimale nichtleere Menge ist mit der Eigenschaft, daß für alle $x \in X$ gilt: $x \in \sigma(X \setminus \{x\})$

   (b) $\sigma(X) = X \cup \{x : (E, \mathcal{F}) \text{ enthält einen Kreis } C \text{ mit } x \in C \subseteq X \cup \{x\}\}$. (4 Punkte)

4. Sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid mit Rangfunktion r, und sei k eine ganze Zahl mit $|E| \geq k > r(E)$. Sei $\mathcal{B}_k = \{X \subseteq E \mid |X| = k \text{ und } r(X) = r(E)\}$. Zeigen Sie, daß $\mathcal{B}_k$ die Menge der Basen eines Matroids ist. (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 10.7.2012, **vor** der Vorlesung.