Sommersemester 2012 | Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Prof. Dr. B. Korte | Universität Bonn
Dr. U. Brenner

Kombinatorik, Graphen, Matroide
11. Übung

1. Sei E eine endliche Menge und $\mathcal{B} \subseteq 2^E$. Zeigen Sie, daß $\mathcal{B}$ genau dann die Menge der Basen eines Matroids ist, wenn die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:

   (B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$

   (B2)' Für $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $x \in B_1$ gibt es ein Element $y \in B_2$, so daß $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$.

   (B3) Für $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ gilt $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow B_1 = B_2$. (4 Punkte)

2. Zeigen Sie, daß Unabhängigkeitsorakel und Basis-Obermengen-Orakel für Matroide polynomiell äquivalent sind. (4 Punkte)

3. Es sei k eine positive ganze Zahl. Für einen Graphen G sei

   $$\mathcal{F}_G = \{F \subseteq E(G) \mid \Delta((V(G), F)) \leq k\}.$$

   (a) Zeigen Sie, daß $(E(G), \mathcal{F}_G)$ immer ein Unabhängigkeitssystem ist, aber im allgemeinen kein Matroid.

   (b) Betrachten Sie das Problem, zu einem gegebenen Graphen G mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$ eine Menge $F \in \mathcal{F}_G$ zu finden, die $\sum_{e \in F} c(e)$ maximiert. Zeigen Sie, daß der Best-In-Greedy für dieses Optimierungsproblem eine Lösung findet, die höchstens um den Faktor 2 schlechter ist als eine optimale Lösung. (4 Punkte)

4. Es sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid. Zeigen Sie, daß der Best-In-Greedy jede Bottleneck-Funktion $c(F) = \min\{c(e) \mid e \in F\}$ über den Basen maximiert. (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 3.7.2012, **vor** der Vorlesung.