

## Kombinatorik, Graphen, Matroide

### 9. Übung

1. Sei  $G$  ein Graph mit  $m$  Kanten. Dann gilt:

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}.$$

(4 Punkte)

2. Sei  $G$  ein Graph mit  $n$  Knoten. Zeigen Sie, daß  $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$  gilt. (4 Punkte)
3. Für einen ungerichteten Graph  $G$  und  $t \in \mathbb{N}$  sei  $p_G(t)$  die Zahl der verschiedenen zulässigen Knotenfärbungen von  $G$  mit den Farben  $\{1, \dots, t\}$ . Dabei betrachten wir zwei Knotenfärbungen als verschieden, wenn es mindestens einen Knoten gibt, dem sie unterschiedliche Farben zuordnen. Zeigen Sie, daß für jeden Graphen  $G$  die Abbildung  $p_G : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ein Polynom vom Grad  $|V(G)|$  ist. (4 Punkte)

Hinweis: Induktion in der Zahl der Kanten. Für den Induktionsschritt überlegen Sie sich, was passiert, wenn Sie eine Kante löschen oder kontrahieren.

4. (a) Bestimmen Sie  $p_G$  (siehe vorige Aufgabe) für den Fall, daß  $G$  ein Baum ist.
- (b) Wie sieht  $p_G$  aus, wenn  $G$  ein Wald ist, der aus  $k$  Zusammenhangskomponenten besteht? (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 19.6.2012, **vor** der Vorlesung.