

Kombinatorik, Graphen, Matroide

1. Übung

- Es sollen n Luftballons an k Kinder verteilt werden. Luftballons mit derselben Farbe sollen dabei nicht unterschieden werden. Wie viele Möglichkeiten einer solchen Verteilung gibt es, wenn
 - alle Ballons rot sind,
 - es r rote und $n - r$ blaue Ballons gibt,
 - alle Ballons verschiedene Farben haben?(4 Punkte)
- An einem Fußballturnier nehmen n Mannschaften teil. Jede Mannschaft spielt gegen jede andere. Der Sieger eines Spiels erhält 2 Punkte, der Verlierer 0. Bei einem Unentschieden bekommen beide Mannschaften je einen Punkt. In der Abschlußtafel werden die Mannschaften absteigend nach der Zahl der Punkte sortiert. Bei Punktgleichheit entscheidet die Differenz der erzielten Tore und der Gegentore. Ist auch diese Differenz gleich, entscheidet das Los. Sei nun $k \in \{1, \dots, n\}$. Wie viele Punkte hat die auf Platz k liegende Mannschaft mindestens? Wie ändert sich das Ergebnis, wenn man zur Dreipunkte-Regel übergeht, wenn also der Sieger einer Partie 3 Punkte erhält? (4 Punkte)
- Es seien k paarweise disjunkte Mengen S_1, \dots, S_k gegeben. Außerdem sei $a_i = |S_i|$ für $i = 1, \dots, k$. Zeigen Sie:

$$\left| \left\{ X \subseteq \bigcup_{i=1}^k S_i : |X \cap S_i| \leq 1 \text{ für alle } i \in \{1, \dots, k\} \right\} \right| = \prod_{i=1}^k (a_i + 1).$$

Folgern Sie daraus, daß, wenn eine Zahl n die Primfaktorzerlegung $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots$ hat, n genau $t(n) = \prod_i (a_i + 1)$ Teiler hat. Wie kann man an $t(n)$ leicht überprüfen, ob n eine Quadratzahl ist? (4 Punkte)

- Wie viele Möglichkeiten gibt es, k Zahlen aus der Menge $\{1, \dots, n\}$ auszuwählen, ohne daß man zwei aufeinanderfolgende Zahlen aussucht? (4 Punkte)