Sommersemester 2011 | Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Prof. Dr. B. Korte | Universität Bonn
Dr. U. Brenner

Kombinatorik, Graphen, Matroide
12. Übung

1. Zeigen Sie, daß Unabhängigkeitsorakel und Basis-Obermengen-Orakel für Matroide polynomiell äquivalent sind. (4 Punkte)

2. Es sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid. Zeigen Sie, daß der Best-In-Greedy jede Bottleneck-Funktion $c(F) = \min\{c(e) \mid e \in F\}$ über den Basen maximiert. (4 Punkte)

3. Es sei k eine positive ganze Zahl. Für einen Graphen G sei
$$\mathcal{F}_G = \{F \subseteq E(G) \mid \Delta((V(G), F)) \leq k\}.$$
   (a) Zeigen Sie, daß $(E(G), \mathcal{F}_G)$ immer ein Unabhängigkeitssystem ist, aber im allgemeinen kein Matroid.

   (b) Betrachten Sie das Problem, zu einem gegebenen Graphen G mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$ eine Menge $F \in \mathcal{F}_G$ zu finden, die $\sum_{e \in F} c(e)$ maximiert. Zeigen Sie, daß der Best-In-Greedy für dieses Optimierungsproblem eine Lösung findet, die höchstens um den Faktor 2 schlechter ist als eine optimale Lösung. (4 Punkte)

4. Seien $(E, \mathcal{F}_1), \ldots, (E, \mathcal{F}_k)$ Matroide, und sei
$$\mathcal{F} = \{F \subseteq E \mid \exists X_1, \ldots, X_k : X = X_1 \dot\cup \ldots \dot\cup X_k \text{ und } X_i \in \mathcal{F}_i \text{ für } i \in \{1, \ldots, k\}\}.$$
   $(E, \mathcal{F})$ heißt dann auch Vereinigung der $(E, \mathcal{F}_1), \ldots, (E, \mathcal{F}_k)$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Wenn $(E, \mathcal{F}_1), \ldots, (E, \mathcal{F}_k)$ uniforme Matroide sind, dann ist auch $(E, \mathcal{F})$ ein uniformes Matroid.

   (b) Wenn $(E, \mathcal{F}_1), \ldots, (E, \mathcal{F}_k)$ graphische Matroide auf einem einfachen Graphen sind, dann ist auch $(E, \mathcal{F})$ ein graphisches Matroid. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 7.7.2011, vor der Vorlesung.