Sommersemester 2011
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide

10. Übung

1. Sei E eine endliche Menge und $\mathcal{B} \subseteq 2^E$. Zeigen Sie, daß $\mathcal{B}$ genau dann die Menge der Basen eines Matroids ist, wenn die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:

   (B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$

   (B2)' Für $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $x \in B_1$ gibt es ein Element $y \in B_2$, so daß $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$.

   (B3) Für $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ gilt $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow B_1 = B_2$. (4 Punkte)

2. Sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid mit Rangfunktion r, und sei k eine ganze Zahl mit $k > r(E)$. Sei $\mathcal{B}_k = \{X \subseteq E \mid |X| = k \text{ und } r(X) = r(E)\}$. Zeigen Sie, daß $\mathcal{B}_k$ die Menge der Basen eines Matroids ist. (4 Punkte)

3. Sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid mit Rangfunktion r. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: $(E, \mathcal{F})$ ist genau dann uniform, wenn es keine Kreise mit weniger als $r(E)+1$ Elementen enthält. (4 Punkte)

4. Sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid mit Rangfunktion r, und sei k eine positive ganze Zahl. Sei $r_k : 2^E \to \mathbb{Z}_+$ definiert durch $r_k(X) = \min\{k, r(X)\}$. Zeigen Sie, daß r_k die Rangfunktion eines Matroids ist. (4 Punkte)

Abgabe: **Dienstag**, den 21.6.2010, vor der Vorlesung.