

## Kombinatorik, Graphen, Matroide

### 9. Übung

1. Ein Graph heißt *perfekt*, wenn für jeden seiner induzierten Subgraphen  $H$  gilt:  $\chi(H) = \omega(H)$ . Zeigen Sie, daß bipartite Graphen und Intervallgraphen perfekt sind (dabei ist ein Graph  $G$  genau dann ein Intervallgraph, wenn es Intervalle  $[a_v, b_v]$  für  $v \in V(G)$  gibt, so daß  $\{v, w\} \in E(G) \Leftrightarrow [a_v, b_v] \cap [a_w, b_w] \neq \emptyset$ ). (4 Punkte)
2. Für einen ungerichteten Graph  $G$  und  $t \in \mathbb{N}$  sei  $p_G(t)$  die Zahl der verschiedenen zulässigen Knotenfärbungen von  $G$  mit den Farben  $\{1, \dots, t\}$ . Dabei betrachten wir zwei Knotenfärbungen als verschieden, wenn es mindestens einen Knoten gibt, dem sie unterschiedliche Farben zuordnen. Zeigen Sie, daß für jeden Graphen  $G$  die Abbildung  $p_G : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ein Polynom vom Grad  $|V(G)|$  ist. (4 Punkte)  
Hinweis: Betrachten Sie zunächst vollständige Graphen. Bei Graphen, in dem es zwei Knoten  $v$  und  $w$  gibt, die nicht durch eine Kante verbunden sind, können Sie sich dann überlegen, was passiert, wenn Sie  $v$  und  $w$  durch eine zusätzliche Kante verbinden oder  $\{v, w\}$  kontrahieren.
3. (a) Bestimmen Sie  $p_G$  (siehe Aufgabe 2) für den Fall, daß  $G$  ein Baum ist.  
(b) Wie sieht  $p_G$  aus, wenn  $G$  ein Wald ist, der aus  $k$  Zusammenhangskomponenten besteht? (4 Punkte)
4. Sei  $G$  ein Graph, und sei  $\mathcal{F}$  die Familie aller Mengen  $X \subseteq V(G)$ , für die ein kardinalitätsmaximales Matching existiert, das keinen Knoten in  $X$  überdeckt. Zeigen Sie, daß  $(V(G), \mathcal{F})$  ein Matroid ist. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 24.6.2010, vor der Vorlesung.

#### Weiterer Hinweis auf die nächste Mentoren-Veranstaltung:

Datum: Dienstag 22.06.2010, 18 Uhr s.t. im Hörsaal

Thema: „Diskrete Mathematik jenseits der Uni“

Referent: Johannes Zühlke, Fraunhofer-Institut für Algorithmen und wissenschaftliches Rechnen  
Johannes Zühlke, der am Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik seine Diplomarbeit geschrieben hat, wird einen Einblick in seine derzeitige Arbeit geben und darauf eingehen, inwieweit ihn sein Studium bei der Arbeit noch beeinflusst.