

## Kombinatorik, Graphen, Matroide

## 9. Übung

1. Bei welchen zusammenhängenden Graphen ist die chromatische Zahl größer als die kantenchromatische Zahl? (4 Punkte)
2. Zeigen Sie (unter Benutzung des Vierfarbensatzes), daß die kantenchromatische Zahl eines 3-regulären planaren Graphen  $G$  ohne Brücken (d.h. ohne Kanten, deren Löschung die Zahl der Komponenten von  $G$  erhöhen würde), 3 ist. Gilt diese Aussage auch noch, wenn man statt 3-Regularität nur  $\Delta(G) \leq 3$  fordert? (4 Punkte)
3. Für einen ungerichteten Graph  $G$  und  $t \in \mathbb{N}$  sei  $p_G(t)$  die Zahl der verschiedenen zulässigen Knotenfärbungen von  $G$  mit den Farben  $\{1, \dots, t\}$ . Dabei betrachten wir zwei Knotenfärbungen als verschieden, wenn es mindestens einen Knoten gibt, dem sie unterschiedliche Farben zuordnen. Zeigen Sie, daß für jeden Graphen  $G$  die Abbildung  $p_G : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ein Polynom vom Grad  $|V(G)|$  ist. (4 Punkte)  
Hinweis: Betrachten Sie zunächst vollständige Graphen. Bei Graphen, in dem es zwei Knoten  $v$  und  $w$  gibt, die nicht durch eine Kante verbunden sind, können Sie sich dann überlegen, was passiert, wenn Sie  $v$  und  $w$  durch eine zusätzliche Kante verbinden oder  $\{v, w\}$  kontrahieren.
4. (a) Bestimmen Sie  $p_G$  (siehe Aufgabe 1) für den Fall, daß  $G$  ein Baum ist .  
(b) Wie sieht  $p_G$  aus, wenn  $G$  ein Wald ist, der aus  $k$  Zusammenhangskomponenten besteht? (4 Punkte)