Sommersemester 2009 | Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik

Prof. Dr. B. Korte | Universität Bonn

Dr. U. Brenner

Kombinatorik, Graphen, Matroide

2. Übung

1. Finden Sie für $\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m}\binom{n}{k}$ eine einfache Formel, in der keine Summe mehr vorkommt.

   (4 Punkte)

2. Beweisen Sie

   $$\sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}.$$

   (4 Punkte)

3. Gegeben sei eine Permutation $a_1 a_2 \dots a_n$ von $\{1,\dots,n\}$. Eine *Inversion* ist ein Paar a_i, a_j mit $i < j$ aber $a_i > a_j$. Zum Beispiel hat 1 4 3 5 2 die Inversionen 4,3; 4,2: 3,2; 5,2. Es sei $I_{n,k}$ die Zahl der Permutationen von $\{1,\dots,n\}$ mit genau k Inversionen. Zeigen Sie:

   (a) $I_{n,0} = 1$.

   (b) $I_{n,k} = I_{n,\binom{n}{2}-k}$ für $k = 0,\dots,\binom{n}{2}$.

   (c) $I_{n,k} = I_{n-1,k} + I_{n,k-1}$ für $k < n$. Gilt dies auch für $k = n$?

   (d) $\sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} (-1)^k I_{n,k} = 0$ für $n \geq 2$. (4 Punkte)

4. Berechnen Sie die folgende Ausdrücke durch die Methode "Isolieren der Terme" (d.h. finden Sie eine Darstellung, die eine Auswertung mit einer konstanten Anzahl von Rechenoperationen erlaubt):

   (a) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k$

   (b) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2$ (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 7.5.2008, **vor** der Vorlesung.