Diskrete Mathematik II
Sommersemester 2006
Abgabe: Dienstag, 13. Juni, vor der Vorlesung

Übungsblatt 8

Aufgabe 1:

Zeigen Sie, daß zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein bipartiter Graph der Ordnung $2n$ existiert, zu dessen Eckenfärbung der Greedy Algorithmus (vgl. Satz 16.11) bei ungünstiger Färbungsreihenfolge der Ecken n Farben benötigt.

Zeigen Sie weiter, daß zu jedem Graphen G eine Färbungsreihenfolge der Ecken existiert, so daß der Greedy Algorithmus genau $\chi(G)$ Farben benötigt.

Für welche Graphen G benötigt der Greedy Algorithmus $\chi(G)$ Farben für jede Färbungsreihenfolge der Ecken?

(4 Punkte)

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, daß bipartite Graphen, Intervalgraphen und chordale Graphen perfekt sind.

(*Ein Graph $G = (V, E)$ ist genau dann ein Intervalgraph, falls für jede Ecke $v \in V$ ein abgeschlossenes Interval $I_v = [a_v, b_v] \subseteq \mathbb{R}$ existiert mit $E = \{uv \mid u, v \in V, u \neq v, I_u \cap I_v \neq \emptyset\}$. Ein Graph ist genau dann chordal, wenn er keinen Kreis C_l mit $l \geq 4$ als induzierten Teilgraphen enthält.*)

(4 Punkte)

Aufgabe 3:

Es sei $\mathcal{Z}$ eine Instanz des Erfüllbarkeitsproblems (= Satisfiability Problems) mit n nichtleeren Klauseln, so daß für jedes Literal x entweder $\{x\} \notin \mathcal{Z}$ oder $\{\bar{x}\} \notin \mathcal{Z}$ gilt.

Zeigen Sie die Existenz einer Wahrheitswertbelegung, die mindestens $\frac{\sqrt{5}-1}{2}n$ der Klauseln von $\mathcal{Z}$ erfüllt.

(4 Punkte)

Aufgabe 4:

Zeigen Sie, daß die "Fehlerwahrscheinlichkeit" $\frac{1}{2}$ in Definition 16.24 äquivalent durch jede beliebige Zahl zwischen 0 und 1 ersetzt werden kann.

Folgern Sie daraus, daß es für ein beliebiges $\rho > 1$ und unter der Annahme $P \neq NP$ für das Maximum Clique Problem keinen ρ-Faktor Approximationsalgorithmus geben kann.

(4 Punkte)

Aufgabe 5:

Betrachten Sie folgenden Greedy Algorithmus für das Knapsack Problem: *Sortiere die Elemente so, daß (nach geeigneter Umbenennung) $\frac{c_1}{w_1} \geq \frac{c_2}{w_2} \geq \dots \geq \frac{c_n}{w_n}$ gilt. Setze $S := \emptyset$.*

Für i von 1 bis n: Falls $w_i + \sum_{j \in S} w_j \leq W$ gilt, so setze $S := S \cup \{i\}$.

Zeigen Sie, daß dieser Algorithmus für kein $k \geq 1$ ein k-Faktor Approximationsalgorithmus ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 6:

Beschreiben Sie einen pseudopolynomiellen Algorithmus für das Knapsack Problem mit Laufzeit $O(nW)$. (4 Punkte)