Diskrete Mathematik II
Sommersemester 2006
Abgabe: Dienstag, 30. Mai, vor der Vorlesung

Übungsblatt 7

Aufgabe 1:

Formulieren Sie einen 2-Approximationsalgorithmus für das folgende Problem:
Gegeben: Ein gerichteter Graph G mit Kantengewichten.
Gesucht: Ein gerichteter azyklischer Teilgraph von G mit maximalen Gewicht.

(4 Punkte)

Aufgabe 2:

Wir betrachten das folgende Problem:
Gegeben: Ein ungerichteter Graph G, Kantengewichte $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Gesucht: Eine Teilmenge $X \subseteq V(G)$, $|X| = k$, so dass

$$\max_{v \in V(G)} \min_{x \in X} \operatorname{dist}_{(G,c)}(v, x)$$

minimal ist.
Den optimale Wert bezeichnen wir mit $\mathrm{OPT}(G, c, k)$.

a) Sei S eine maximale unabhängige Menge in $(V(G), \{\{v, w\} : \operatorname{dist}_{(G,c)}(v, w) \leq 2R\})$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{OPT}(G, c, |S|) \geq R$.

b) Beschreiben Sie einen 2-Approximationsalgorithmus für das k-Center Problem

c) Zeigen Sie, dass es keinen r-Approximationsalgorithmus für das k-Center Problem gibt für alle $r < 2$, falls $P \neq NP$. (Tipp: Dominating Set Problem)

(4 Punkte)

b.w.

Aufgabe 3:

Wir betrachten den folgenden 'Lokale Suche'-Algorithmus für das 'Maximum Cut' Problem (Finde einen kardinalitätsmaximalen Schnitt in einem gegebenen ungerichteten Graphen):
Wir starten mit einer beliebigen Partition $(S, V(S) \setminus S)$. Nun wird iterativ überprüft, ob ein Knoten existiert, der zu S hinzugefügt oder aus S gelöscht werden kann, so dass der resultierende Schnitt sich vergrößert. Sobald keine Verbesserung mehr möglich ist, terminiert der Algorithmus.

a) Zeigen Sie, dass der beschriebene Algorithmus ein 2-Approximationsalgorithmus ist.

b) Findet der Algorithmus immer eine optimale Lösung, wenn er auf planaren, bzw. auf bipartiten Graphen angewandt wird?

(4 Punkte)

Aufgabe 4:

Kann man eine minimale Knotenüberdeckung (oder eine maximale stabile Menge) in bipartiten Graphen in polynomieller Zeit finden?

(4 Punkte)