Diskrete Mathematik II
Sommersemester 2006
Abgabe: Dienstag, 9. Mai, vor der Vorlesung

Übungsblatt 5

Aufgabe 1:

Wir wollen die Funktion $f(n) = n + 1 \quad (n \in \mathbb{N}$ in Binärdarstellung) mit Hilfe einer Turingmaschine berechnen. In der Vorlesung wurde eine Turingmaschnie Φ vorgestellt, die $f(n)$ mit $\text{time}(\Phi, s) \leq 3 \text{ size}(s) + c$ für alle $s \in \{0,1\}^*$ und c konstant bestimmt.

a) Geben Sie eine Turingmaschine Ψ an, die $f(n)$ mit $\text{time}(\Psi, s) \leq 2 \text{ size}(s) + c$ für alle $s \in \{0,1\}^*$ und c konstant berechnet.

b) Zeigen Sie, dass keine Turingmaschine Ψ existiert, die $f(n)$ mit $\text{time}(\Psi, s) \leq \alpha \text{ size}(s) + c$ für alle $s \in \{0,1\}^*$ mit $\alpha < 2$ und c konstant berechnet.

(4 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei $k \geq 2$, A ein Alphabet mit $|A| = 2^k$ und

$$\Phi : \{0, \ldots, N\} \times \bar{A} \to \{-1, \ldots, N\} \times \bar{A} \times \{-1, 0, 1\}$$

eine Turingmaschine über A.
Geben Sie eine Turingmaschine Ψ über dem Alphabet $\{0,1\}$ an, für die $\text{output}(\Psi, s) = \text{output}(\Phi, s)$ und $\text{time}(\Psi, s) \leq O(k)\text{time}(\Phi, s)$ für alle $s \in \{0,1\}^*$ ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 3:

Wir betrachten das Halte-Problem (eng.: Halting Problem): Seien x und y zwei binäre Strings, wobei x eine Turingmaschine Ψ kodiert. Gilt $\text{time}(\Psi, y) < \infty$?
Zeigen Sie, dass das Halte-Problem unentscheidbar ist (d..h. es gibt keinen Algorithmus, der das Problem löst).

(4 Punkte)

b.w.

Aufgabe 4:

Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Probleme in NP liegen:

a) Seinen G und H zwei Graphen. Ist G isomorph zu einem Teilgraph von H?

b) Sei n eine natürliche Zahl. Existiert eine Primzahl p mit $n = p^p$?

(4 Punkte)

Aufgabe 5:

Zeigen Sie: Ist $P \in NP$, dann existiert ein Polynom p, so dass P von einem (deterministischen) Algorithmus mit Laufzeit $O(2^{p(n)})$ gelöst werden kann, wobei n die Inputgröße bezeichnet.

(4 Punkte)

Aufgabe 6:

Sei $\mathcal{Z}$ ein 2-SAT Instanz, d.h. $\mathcal{Z}$ ist eine Menge von Klauseln über einer Menge X von Literalen, so dass jede Klausel aus genau zwei Literalen besteht. Sei G der gerichtete Graph, dessen Knoten die Literale über X sind und der die Kante (λ_1, λ_2) genau dann enthält, wenn $\{\bar{\lambda_1}, \lambda_2\}$ in $\mathcal{Z}$ vorkommt.

a) Zeigen Sie: Liegen für eine Variable x die beiden Literale x und $\bar{x}$ in der selben Zusammenhangskomponente von G, dann ist $\mathcal{Z}$ nicht erfüllbar.

b) Zeigen Sie die Umkehrung von a).

c) Geben Sie einen Algorithmus für 2-SAT an, der in linearer Zeit entweder eine erfüllende Wahrheitsbelegung findet, oder entscheidet, dass die Eingabeinstanz nicht erfüllbar ist.

(4 Punkte)