Diskrete Mathematik II
Sommersemester 2006
Abgabe: Dienstag, 2. Mai, vor der Vorlesung

Übungsblatt 4

Aufgabe 1:

Sei E eine endliche Menge, $c \in \mathbb{R}_+^E$ und $f : 2^E \to \mathbb{R}$ submodular aber nicht notwendigerweise monoton. Zudem gelte $f(\emptyset) \geq 0$.
Zeigen Sie, dass der Polymatroid Algorithmus auf c und f angewandt eine Lösung x findet mit

$$c^T x = \max\{c^T x : \sum_{e \in A} x_e \leq f(A)\ \forall A \subseteq E\}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei E endlich und $f : 2^E \to \mathbb{R}$. Wir definieren für jedes $a \in E$ die Funktion $f_a : 2^{E \setminus \{a\}} \to \mathbb{R}$ als

$$f_a(X) = f(X \cup \{a\}) - f(X) \quad (\forall X \subseteq E \setminus \{a\}).$$

Zeigen Sie, dass die Funktion f genau dann submodular ist, wenn für jedes $a \in E$ die Funktion f_a monoton fallend ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei E endlich und $f : 2^E \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie

a) Für jedes $x \in \mathbb{R}_+^E$ existiert ein eindeutiges $k \in \mathbb{Z}_+$ und eindeutige $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$ und $\emptyset \subsetneq T_1 \subsetneq T_2 \subsetneq \ldots \subsetneq T_k \subseteq E$ so dass $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i \chi^{T_i}$, wobei χ^{T_i} der Inzidenzvektor von T_i ist.

Wir definieren die Funktion $f' : \mathbb{R}_+^E \to \mathbb{R}$ als $f'(x) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(T_i)$ für $x \in \mathbb{R}_+^E$, wobei k, λ_i, T_i die eindeutigen Zahlen und Mengen bezüglich x aus Teil a) sind.
Zeigen Sie:

b) f ist genau dann submodular, wenn f' konvex ist.

(4 Punkte)