Diskrete Mathematik II
Sommersemester 2006
Abgabe: Dienstag, 18. April, vor der Vorlesung

Übungsblatt 2

Aufgabe 1:
Sei M ein Matroid und B_1, B_2 zwei Basen von M. Zeige, dass

a) es eine Bijektion $\pi : B_1 \to B_2$ gibt, so dass für alle $e \in B_1$ die Menge $(B_2 \setminus \{\pi(e)\}) \cup \{e\}$ eine Basis von M ist.

b) für jedes $e \in B_1$ ein $f \in B_2$ gibt, so dass $(B_1 \setminus \{e\}) \cup \{f\}$ und $(B_2 \setminus \{f\}) \cup \{e\}$ Basen von M sind.

(4 Punkte)

Aufgabe 2:
Seien $M = (E, \mathcal{F})$ ein Matroid und A eine unabhängige Menge in M. Zeige

a) Für alle $x \in E$ enthält $A \cup \{x\}$ höchstens einen Kreis.

b) Ist B eine Basis von M und $x \in E \setminus B$, dann existiert ein eindeutiger Kreis $C = C(x, B)$ mit

$$x \in C \subseteq B \cup \{x\}.$$

c) Ist C ein Kreis von M und $a \in C$, dann existiert eine Basis B mit $C = C(a, B)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei $|E| < \infty$ und $\sim$ eine Relation zwischen Elementen von E und Teilmengen von E.
Zeigen Sie:
Es existiert genau dann ein Matroid $M = (E, \mathcal{F})$ mit $x \sim F \Leftrightarrow rg(F) = rg(F \cup \{x\})$ falls $\sim$ folgende Axiome für alle $x, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m$ aus E erfüllt:

(D1) $y_i \sim \{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \quad (1 \leq i \leq n)$.

(D2) Ist $n \geq 1$ und $x \sim \{y_1, \ldots, y_n\}$ und $x \nsim \{y_1, \ldots, y_{n-1}\}$ dann gilt $y_n \sim \{y_1, \ldots, y_{n-1}, x\}$.

(D3) Gilt $x \sim \{y_1, \ldots, y_n\}$ und $y_i \sim \{z_1, \ldots, z_m\}$ für alle $i, 1 \leq i \leq n$, dann folgt: $x \sim \{z_1, \ldots, z_m\}$.

(8 Punkte)