Klausur zum Modul *Einführung in die Diskrete Mathematik*

Prof. Dr. Jens Vygen **Lösungen** 25. Februar 2009

Lösung 1. Es gibt n Möglichkeiten für v (alle Knoten) und dann jeweils $n - m - 1$ Möglichkeiten für w (die Wurzeln aller Zusammenhangskomponenten von G mit Ausnahme derjenigen, welche v enthält). Insgesamt also $n(n - m - 1)$.

Lösung 2. Finde (durch Anwendung eines MST-Algorithmus, z.B. dem von Kruskal) einen minimal gewichteten aufpannenden Baum T in (G, c'), wobei $c'(e) := \max\{0, -c(e)\}$ für $e \in E(G)$. Dann ist $(V(G), T)$ auch ein maximal gewichteter zusammenhängender aufspannender Teilgraph von $(G, -c')$. Durch Hinzufügen aller Kanten positiven Gewichts erhält man also einen maximal gewichteten zusammenhängenden aufspannenden Teilgraphen von (G, c).

Lösung 3. Für $e = (v, w) \in E(G)$ ist $\mathrm{dist}_{(G,c)}(v, t) \leq c(e) + \mathrm{dist}_{(G,c)}(w, t)$, also $-\pi(v) \leq c(e) - \pi(w)$ und daher $d(e) + \pi(v) - \pi(w) \geq c(e) + \pi(v) - \pi(w) \geq 0$.

Lösung 4. Sei X die Menge der Variablen. Definiere einen Graphen mit Knotenmenge $X \mathbin{\dot\cup} \{s, t\}$. Für jede Klausel vom Typ $\{x\}$ mit Gewicht c füge eine Kante (s, x) mit Kapazität c ein. Für jede Klausel vom Typ $\{\bar{x}\}$ mit Gewicht c füge eine Kante (x, t) mit Kapazität c ein. Für jede Klausel vom Typ $\{\bar{x}, y\}$ mit Gewicht c füge eine Kante (x, y) mit Kapazität c ein. Dann entspricht jede Menge $W \subseteq X$ einer Wahrheitsbelegung T mit $T(x) = \mathit{true} \Leftrightarrow x \in W$, und die Gesamtkapazität von $\delta^+(\{s\} \cup W)$ ist gleich dem Gesamtgewicht der von T nicht erfüllten Klauseln. Also ist ein s-t-Schnitt minimaler Kapazität gesucht.

Lösung 5. Falls $c(\bar{e}) \geq 0$, ist der Nullfluss optimal. Sonst entferne $\bar{e}$ und füge einen Knoten s hinzu. Sei $\bar{e} = (v, w)$. Setze $t := v$ und füge eine Kante (s, w) mit Kapazität $u(\bar{e})$ hinzu. Finde dann einen maximalen s-t-Fluss g. Dann definiert $f(e) := g(e)$ für $e \in E(G) \setminus \{\bar{e}\}$ und $f(\bar{e}) := \mathrm{value}(f) = f((s, w))$ eine kostenminimale Zirkulation in (G, u).

Lösung 6. $f(A, C) = 2$, $f(A, D) = f(A, B) = 1$, $f(B, D) = f(C, D) = 3$, $f(B, C) = 0$. Optimalität folgt daraus, dass π ein zulässiges Potenzial in G_f ist, wobei $\pi(A) = 0$, $\pi(C) = -3$, $\pi(D) = 6$ und $\pi(B) = -1$.

Lösung 7. Da f optimal ist, gibt es ein zulässiges Potenzial π in G_f. Also ist $c_\pi(e) = 0$ für jede Kante $e \in E(H)$, denn auch die Rückwärtskante gehört ja zu G_f. Für $v, w \in V(H)$, einen v-w-Weg P in H und einen v-w-Weg Q in G_f gilt dann $c(E(P)) + \pi(v) - \pi(w) = c_\pi(E(P)) = 0 \leq c_\pi(E(Q)) = c(E(Q)) + \pi(v) - \pi(w)$, also ist P nicht länger als Q.

Lösung 8. *NP* ist die Klasse aller Entscheidungsprobleme (X, Y), für die es ein Polynom $p \geq 0$ und ein Entscheidungsproblem (X', Y') in P gibt, so dass $X' = \{x\#c : x \in X, c \in \{0,1\}^{\lfloor p(\mathrm{size}(x)) \rfloor}\}$ und $Y = \{x \in X : \exists c \in \{0,1\}^{\lfloor p(\mathrm{size}(x)) \rfloor} \text{ mit } x\#c \in Y'\}$.

Lösung 9. Problem (a) ist in P: enumeriere alle Listen von 17 paarweise verschiedenen Knoten $v_1, \ldots, v_{17}$ und prüfe jeweils, ob $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$ für $i = 1, \ldots, 16$ und $G - \{v_2, \ldots, v_{16}\}$ einen v_1-v_{17}-Weg enthält.

Problem (b) ist in *NP*, da ein entsprechender Kreis ein Zertifikat darstellt. Es ist auch *NP*-vollständig, denn das (*NP*-vollständige) Hamiltonkreis-Problem wird auf Problem (b) polynomiell transformiert, indem zu einem gegebenen Graphen G genau $|V(G)|$ isolierte Knoten hinzugefügt werden.

Problem (c) ist in P: zu testen ist nach dem Satz von König, ob G bipartit ist, was mit BFS in linearer Zeit möglich ist.

Lösung 10. Füge einen Knoten t und für jedes $i \in \{1, \ldots, \lambda\}$ eine Kante $\{v_i, t\}$ hinzu (ggfs. parallele Kanten); das Ergebnis heiße G'. Zu zeigen ist, dass es λ kantendisjunkte v_0-t-Wege in G' gibt. Andernfalls gibt es nach dem Satz von Menger aber eine Menge $F \subseteq E(G')$, so dass $G' - F$ keinen v_0-t-Weg enthält und $|F| < \lambda$. Sei dann X die Menge der Knoten, von denen aus t in $G' - F$ erreichbar ist. Wegen $|F| < \lambda$ ist $X \setminus \{t\} \neq \emptyset$. Ferner ist $\delta_G(X \setminus \{t\}) \subseteq F$ und daher $|\delta_G(X \setminus \{t\})| < \lambda$, im Widerspruch zur Definition von λ.

Lösung 11. G entsteht aus einem Wald, indem jede Kante durch eine Menge paralleler Kanten ersetzt wird. Für jedes Paar von Knoten s, t hat also jeder s-t-Weg die gleiche Knotenabfolge. Es existiert also eine Lösung genau dann, wenn für je zwei Knoten v, w die Zahl der Kanten zwischen v und w in G mindestens so groß ist wie die Zahl der Kanten $\{t, s\} \in E(H)$, für die v und w aufeinanderfolgende Knoten in jedem s-t-Weg sind. Dies ist das Schnittkriterium eingeschränkt auf Knotenmengen X, für die $\delta_G(X)$ nur aus einer Menge paralleler Kanten besteht. Das Schnittkriterium ist also hinreichend; notwendig ist es ohnehin immer.