Klausur zum Modul *Einführung in die Diskrete Mathematik*

Prof. Dr. Jens Vygen **Aufgaben** 25. Februar 2009

Lösen Sie mindestens zehn der folgenden elf Aufgaben. Bei jeder Aufgabe werden zehn Punkte für eine richtige Lösung vergeben, obwohl die Aufgaben unterschiedlich schwierig und zeitaufwändig sind. Wenn Sie alle elf Aufgaben bearbeiten, werden nur die besten zehn Lösungsversuche gewertet. Es sind also maximal 100 Punkte erreichbar. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Aufgabe 1. Sei G ein Branching mit n Knoten und m Kanten. Wieviele Möglichkeiten gibt es, ein geordnetes Paar von Knoten v und w von G auszuwählen, so dass $v \neq w$ und der um eine Kante ergänzte Graph $(V(G), E(G) \,\dot\cup\, \{(v,w)\})$ ein Branching ist?

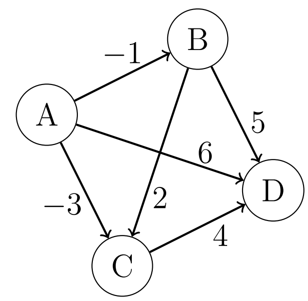
Aufgabe 2. Sei G ein zusammenhängender ungerichteter Graph mit Gewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}$. Beschreiben Sie einen polynomiellen Algorithmus, der einen zusammenhängenden aufspannenden Teilgraphen H von G mit maximalem Gewicht $c(E(H))$ berechnet.

Aufgabe 3. Sei G ein Digraph und seien $c, d : E(G) \to \mathbb{R}_+$ mit $c(e) \le d(e)$ für alle $e \in E(G)$. Sei $t \in V(G)$ und $\pi(v) := -\operatorname{dist}_{(G,c)}(v,t)$. Zeigen Sie, dass π ein zulässiges Potenzial in (G, d) ist.

Aufgabe 4. Betrachten Sie Satisfiability eingeschränkt auf Instanzen, bei denen jede Klausel eine der drei Gestalten $\{x\}$, $\{\bar{x}\}$ oder $\{\bar{x}, y\}$ hat, wobei x und y Variablen seien. Zu jeder Klausel gebe es ein nichtnegatives Gewicht. Zeigen Sie, dass man in polynomieller Zeit eine Wahrheitsbelegung finden kann, die das Gesamtgewicht der erfüllten Klauseln maximiert.

Aufgabe 5. Sei (G, u, b, c) eine Instanz des Minimum-Cost-Flow-Problems und $\bar{e} \in E(G)$. Sei $b(v) = 0$ für alle $v \in V(G)$ und $c(e) = 0$ für alle $e \in E(G) \setminus \{\bar{e}\}$. Zeigen Sie, dass man eine solche Instanz lösen kann, indem man höchstens eine geeignete Instanz des Maximum-Flow-Problems konstruiert und löst.

Aufgabe 6. Geben Sie eine optimale Lösung für die folgende Instanz des MINIMUM-COST-FLOW-PROBLEMs an und beweisen Sie, dass es sich um eine optimale Lösung handelt.
Das Bild zeigt den Digraphen G mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}$. Jede der sechs Kanten hat Kapazität 3. Weiter sei $b(A) = 4$, $b(B) = 2$, $b(C) = 1$ und $b(D) = -7$.



Aufgabe 7. Sei (G, u, b, c) eine Instanz des MINIMUM-COST-FLOW-PROBLEMs und f eine optimale Lösung. Sei H ein stark zusammenhängender Teilgraph von G mit $0 < f(e) < u(e)$ für alle $e \in E(H)$. Beweisen Sie, dass $\mathrm{dist}_{(H,c)}(v, w) = \mathrm{dist}_{(G_f,c)}(v, w)$ für alle $v, w \in V(H)$.

Aufgabe 8. Definieren Sie die Klasse *NP*.
(Hinweis: Sie sollten dabei die Klasse *P* benutzen.)

Aufgabe 9. Zeigen Sie für jedes der drei folgenden Entscheidungsprobleme entweder, dass es in *P* liegt, oder dass es *NP*-vollständig ist: Gegeben ein ungerichteter Graph G, enthält G

(a) einen Kreis der Länge mindestens 17?

(b) einen Kreis mit mindestens der Hälfte aller Knoten?

(c) einen Kreis ungerader Länge?

Aufgabe 10. Sei G ein ungerichteter Graph mit Kantenzusammenhang $\lambda \in \mathbb{N}$ und Knoten $v_0, v_1, \ldots, v_\lambda \in V(G)$ (nicht notwendigerweise alle verschieden). Beweisen Sie, dass es v_0-v_i-Wege P_i in G gibt ($i = 1, \ldots, \lambda$), so dass $P_1, \ldots, P_\lambda$ paarweise kantendisjunkt sind.

Aufgabe 11. Sei (G, H) eine Instanz des UNGERICHTETEN KANTENDISJUNKTE-WEGE-PROBLEMs, wobei G keine Kreise der Länge mehr als zwei enthalte. Zeigen Sie, dass (G, H) genau dann eine Lösung besitzt, wenn das Schnittkriterium erfüllt ist.